

Luštění německého šifrovacího stroje Lorenz

podle bakalářské práce Petra Veselého, MFF UK

27. února 2014

- 2000 – zveřejnění dobové zprávy *General Report on Tunny*
- informací nedostatek k odvození konstrukce šifrátoru Lorenz
- **cíl:** odvození pravděpodobného postupu kryptoanalytiků

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálhopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

- *Bletchley Park* – kryptoanalytické středisko 80 km SZ od Londýna, založené 1939, existence tajena do 70. let 20. stol.
- červen 1941 – zachycení 1. komunikace pomocí šifrátoru Lorenz (TUNNY)
- další zprávy \Rightarrow šifra Vernamova typu
- 30. 8. 1941 – zachycení 2 téměř stejných zpráv šifrovaných stejným klíčem – rozluštny plukovníkem Johnem H. Tiltmanem \Rightarrow 3976 znaků pseudonáhodného klíče
- leden 1942 – rekonstrukce šifrátoru Williamem T. Tuttem
- prosinec 1943 – k určování nastavení rotorů vyvinut Colossus – 1. částečně programovatelný počítač na světě
- 8. 5. 1945 – zachycena poslední zpráva
- celková délka zpráv 63 431 000 znaků
- úspěchy díky luštění Lorenze viz. *Crypto-World 2008*

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván**
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- Lorenz versus Enigma:
 - Enigma – díky přenosnosti výbava bojových útvarů nejnižší úrovně
 - Lorenz – linky mezi nejvyšším velitelstvím pozemní armády v Berlíně a hlavními stany armádních skupin v Evropě a S Africe
- červen 1941 – říjen 1942 – zkušební provoz na lince Berlín, Soluň, Athény
- říjen 1942 – ostré vysílání Berlín, Soluň a Královec, J Rusko
- 1944 – síť 26 linek

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis**
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- Lorenz versus Enigma:
 - Lorenz SZ40 (SZ42A, SZ42B) “Schlüsselzusatzgerät”, tj. přídatný modul k bezdrátovému dálnopisu (šifrování on-line)
 - Enigma – předběžné šifrování zpráv (off-line) a následné odeslání běžným komunikačním kanálem
- dálnopis = telekomunikační zařízení (~psací stroj), elektronický přenos zpráv po lince nebo bezdrátově a tisk
- Baudotův dálnopisný kód (str. 9) – 5-bitový, konkrétní signál (×, ·) dle komunikační linky

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?**
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- skládá se z 12 rotorů (str. 9)
 - 1 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_5$ délek 41, 31, 29, 26, 23,
 - 2 $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ délek 43, 47, 51, 53, 59,
 - 3 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ délek 61, 37
- kolíčky na rotorech ve 2 možných polohách: 0 a 1

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?**
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- generuje pseudonáhodný klíč
- v každém kroku 5-bitový znak klíče: i -tý impuls = součet aktivních kolíčků $\mathcal{K}_i + \mathcal{S}_i \pmod 2$
- pravidla pohybu
 - 1 \mathcal{K}_i se točí vždy
 - 2 \mathcal{S}_i se točí všechna \Leftrightarrow aktivní kolíček \mathcal{M}_2 před případným otočením v poloze 1
 - 3 \mathcal{M}_2 se točí \Leftrightarrow aktivní kolíček \mathcal{M}_1 před otočením v poloze 1
 - 4 \mathcal{M}_1 se točí vždy
- společné otáčení \mathcal{S}_i je hlavní slabinou Lorenze!!!

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza**
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz

- obtížnost:
 - 1 každý měsíc – změna vzorků kol \mathcal{K}_i
 - 2 každé 3 měsíce – změna vzorků kol \mathcal{S}_i
 - 3 každý den – změna vzorků kol $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
- záchytný bod: 12 písmenný indikátor v hlavičce depeše
 - 1 stejné indikátory \Rightarrow stejný klíč
 - 2 nedůslednost operátorů (malá variace indikátorů)
 - 3 pedantství (zašifrované slovo Spruchnummer na začátku zpráv)

- aditivní šifra Vernamova typu ($\mathcal{C} = \mathcal{M} + K$, a tedy $\mathcal{M} = \mathcal{C} + K$)
- slabina: zprávy šifrované stejným klíčem $\mathcal{M} - \mathcal{M}' = \mathcal{C} - \mathcal{C}'$ (rozluštění jedné zprávy vede k rozluštění další šifrované stejným klíčem)
- 30. 8. 1941 – zachyceny 2 zprávy se stejným indikátorem HQIBPEXEZMUG, kratší o délce 3976 znaků
- až na zkratky, interpunkci, překlepy tatáž zpráva (identická zpráva \neq kompromitace!)
- rozluštěna během dvou měsíců plukovníkem John H. Tiltmanem \Rightarrow získáno **3976 znaků pseudonáhodného klíče**

Program

- 1 Trocha historie
- 2 Kde Lorenz využíván
- 3 Lorenz a dálnopis
- 4 Jak Lorenz vypadal?
- 5 Jak Lorenz fungoval?
- 6 Kryptoanalýza
- 7 Rekonstrukce šifrátoru Lorenz**

- pozorování: indikátor ABCDEFGHIJKL a BBCDEFGHIJKL – příslušné klíče v Baudotově kódu stejné až na 1. impuls

$$K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \text{ a } K' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots$$

každý znak klíče = 5 impulsů, tj. místo K zkoumáme binární posloupnosti K_1, K_2, K_3, K_4, K_5

K : C W V S 4 ...

K_1 : 0 1 0 1 0 ...

K_2 : 1 1 1 0 1 ...

K_3 : 1 0 1 1 0 ...

K_4 : 1 0 1 0 0 ...

K_5 : 0 1 1 0 0 ...

Hledání periody \mathcal{K}_1

- v K_1 hledáme opakující se posloupnosti (Kasiského test)
- nejdelší má 26 znaků (str. 19) , shodné úseky vzdáleny o násobky 41
- hypotéza: $K_1 = \mathcal{K}_1 + \mathcal{S}'_1 \pmod{2}$, kde \mathcal{K}_1 periodická (s periodou 41) a \mathcal{S}'_1 má dlouhé opakující se úseky
- analogie Vigenèrovy šifry nad abecedou $\{0, 1\}$, kde šifrovým textem je K_1 , klíčem je prvních 41 znaků posloupnosti \mathcal{K}_1 a otevřeným textem je \mathcal{S}'_1

Ověření periody \mathcal{K}_1

- *index coincidence*: dán text $T = t_1 \dots t_m$

$$IC(T) = p \{t_i = t_j \mid i, j \text{ libovolně zvolené, } 1 \leq i < j \leq m\}$$

- určení periody Vigenèrovy šifry

- 1 šifrový text do tabulek o různém počtu sloupců
- 2 IC textů ve sloupcích
- 3 průměrný IC tabulek
- 4 počet sloupců tabulky s maximálním IC = perioda
- 5 IC sloupců = IC otevřeného textu

Index koincidence \mathcal{S}'_1

- IC v \mathcal{K}_1 pro bigramy, protože 0 a 1 rozděleny rovnoměrně
- tabulka o l sloupcích a IC dvojic sloupců $1; 2, 2; 3, \dots, l - 1; l$
- pro $2 \leq l \leq 99$ určíme průměrný IC
- maximální pro $l = 41$ a $l = 82 \Rightarrow$ perioda \mathcal{K}_1 je 41
- analogicky periody \mathcal{K}_i

$$i = 1 : 41$$

$$i = 2 : 31$$

$$i = 3 : 29$$

$$i = 4 : 26$$

$$i = 5 : 23$$

- odhalení nerovnoměrného rozložení bigramů v \mathcal{S}'_i !

Hledání \mathcal{K}_5

- $\mathcal{K}_5 = k_1 k_2 k_3 \dots k_{23}$ má nejkratší periodu 23
- pro 1. a 2. dvojici sloupců převaha (0, 1) a (1, 0) (str. 26) \Rightarrow platí

$$(k_1, k_2) + (k_2, k_3) \in \{(0, 0), (1, 1)\},$$

a tedy $k_3 = k_1$

- pro 1. a 3. dvojici sloupců

$$(k_1, k_2) + (k_3, k_4) \in \{(0, 0), (1, 1)\},$$

a tedy $k_2 = k_4$ atd.

- pro $k_1 := 0$ je $\mathcal{K}_5 = 01011110001011100001101$

Analýza S'_i

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 S'_1 : & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 S'_2 : & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 S'_3 : & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S'_4 : & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 S'_5 : & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S' : & P & P & J & J & N & N & M & 9 & A & D & D & D
 \end{array}$$

- časté opakování písmen v $S' \Rightarrow S_i$ rotory, které často stojí
- 00111000010 obsahuje běhy 00, 111, 0000, 1, 0
- S'_i vzniká z S_i prodloužením některých běhů S_i
- 2 úlohy
 - 1 určení počtu běhů ve vzorcích kol S_i
 - 2 zjištění délky každého běhu

Počet běhů v \mathcal{S}_i

- hlavní myšlenka: \mathcal{S}'_i má běh délky 1 (010 nebo 101 je v \mathcal{S}'_i), pak \mathcal{S}_i má běh délky 1
- z četnosti výskytů bigramů v $\mathcal{S}'_i \Rightarrow$ takových běhů málo
- v \mathcal{S}'_i jsou posloupnosti tvaru 010...010
- počet běhů v nich je násobek 18 \Rightarrow zřejmě je 18 i počet běhů v kole \mathcal{S}_1

Délky běhů v \mathcal{S}_i

- výpis posloupností tvaru $0\underline{10} \dots \underline{010}$ do řádků pod sebe


```
101100000111111000111110011111100001110000111111000111000011000
101100001111111000011111001111110000011000000110001111100011100
10111100001111100011100011111100001111000000111001110000111100
...
```
- výpis délek jejich běhů do řádků pod sebe


```
112553526434633423
112474526526235332
114453336446323442
...
```
- v každém sloupci minimum = délka příslušného běhu v \mathcal{S}_1
- vzorek \mathcal{S}_1 tak určen až na dvě možná počáteční nastavení

$$\mathcal{S}_1 = 0110001100111000110010110001110011100111100$$

nebo

$$\mathcal{S}_1 = 0011000110011100011001011000111001110011110$$

Odvození řídicích posloupností

- definujeme řídicí posloupnosti $\mathcal{R}_i = \{r_j^{(i)}\}_{j=1}^{3975}$

$r_j^{(i)} = 1$ na konci j -tého kroku se \mathcal{S}_i točí

$r_j^{(i)} = 0$ na konci j -tého kroku \mathcal{S}_i stojí

- jen částečná rekonstrukce \mathcal{R}_i z \mathcal{S}_i a \mathcal{S}'_i :

$\mathcal{S}_1 = (0)011000110011100011001011000111001110011110$

$\mathcal{S}'_1 = 001100001111001111100000011000111001100000\dots$

$\mathcal{R}_1 = ?110111\dots$

$\mathcal{R}_1 = ?111011\dots$

$\mathcal{R}_1 = ?111101\dots$

- posloupnosti \mathcal{R}_i (str. 39)

Odvození řídicích posloupností

- 12 písmenný indikátor \Rightarrow 12 rotorů $(\mathcal{K}_i, \mathcal{S}_i, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \Rightarrow$ společné otáčení kol \mathcal{S}_i
- předpoklad: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_i \Rightarrow$ žádný spor, téměř celá \mathcal{R} (str. 40)
- Kasiského test $\Rightarrow \mathcal{R}$ periodická s periodou $2257 = 37 \cdot 61 \Rightarrow$ 61 a 37 kandidáti na délky kol \mathcal{M}_1 a \mathcal{M}_2 řídicích otáčení \mathcal{S}_i
 1. nápad: \mathcal{M}_1 a \mathcal{M}_2 se točí společně \Rightarrow soustava pro $37 + 61$ neznámých $\mathcal{R} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$, ale nemá řešení
 2. nápad: kolo \mathcal{M}_2 se řídí pohybem kola \mathcal{M}_1 ,
konkrétně: \mathcal{M}_1 se točí vždy a \mathcal{M}_2 jen tehdy, je-li na \mathcal{M}_1 aktivní kolíček v poloze 1, \mathcal{R} vznik prodloužením některých běhů v \mathcal{M}_2

Odvození řídicích posloupností

- \mathcal{R} obsahuje dost osamocených nul, ale málo osamocených jedniček
- \mathcal{R} obsahuje 10100101 (hned 2 osamocené jedničky), z řídkosti výskytu hypotéza: vzorek kola \mathcal{M}_2 obsahuje 2 osamocené jedničky jednou
- počet běhů mezi po sobě jdoucími výskyty 2 osamocených jedniček = násobek 24, \mathcal{R} do řádků po 24 bízích a odvodíme vzorek (očekávaných 37 znaků)

10101110111011101011011101110111011010110

- \mathcal{M}_1 periodická s periodou 61
- \mathcal{M}_1 plyne ze znalosti \mathcal{M}_2 a \mathcal{R}
- naopak z \mathcal{M}_1 dopočteme \mathcal{R} , a tedy i počáteční nastavení rotorů \mathcal{S}_i

| Kolo | Vel. | Vzorek |
|-----------------|------|---|
| \mathcal{K}_1 | 41 | 01100111000011100111000010011011000110110 |
| \mathcal{K}_2 | 31 | 0001100110001011110111000011011 |
| \mathcal{K}_3 | 29 | 01111011000111000110001100100 |
| \mathcal{K}_4 | 26 | 011000101100111001110101001 |
| \mathcal{K}_5 | 23 | 01011110001011100001101 |
| \mathcal{S}_1 | 43 | 0110001100111000110010110001110011100111100 |
| \mathcal{S}_2 | 47 | 11100010001101001110011100110001111000111001100 |
| \mathcal{S}_3 | 51 | 100111001100101110011000110001110001000111100010011 |
| \mathcal{S}_4 | 53 | 10000110001100110001101000110011100110110001100111011 |
| \mathcal{S}_5 | 59 | 01110111000110100111011000110011000110011100001101100011000 |
| \mathcal{M}_1 | 61 | 1011101101101101101110101011101110101101101010111101010111011 |
| \mathcal{M}_2 | 37 | 0110101101010111011101110101101110111 |