Zkoušková písemka LAA2 29.5.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, kde $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem
$$\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} - \alpha_0\overline{\beta_1} - \alpha_1\overline{\beta_0} + 2\alpha_1\overline{\beta_1} + 4\alpha_2\overline{\beta_2},$$
kde $x(t) = \alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}(D^*)$ a vyšetřete vlastní čísla D^* a jim příslušné vlastní vektory.

2. Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Nechť
$$W \equiv \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & -4 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}.$$
Nechť pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x}.$$
Určete vzdálenost $\rho(A(W), W)$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, která má v bázi $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ tvar
$$Q(\vec{x}) = (\alpha+1)\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + \alpha\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha\alpha_2\alpha_3.$$
Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby
   (a) Q byla indefinitní,
   (b) Q byla singulární (v takovém případě najděte polární bázi $\mathcal{A}$ a ${}^{\mathcal{A}}Q$),
   (c) hodnost Q byla rovna 1.