Zkoušková písemka LAA2 27.5.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, kde $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor (tedy se standardním skalárním součinem).

$$(a)\ {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b)\ {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{C}^3$. Najděte ortonormální bázi $\mathcal{Y}$ sestavenou z vlastních vektorů A, existuje-li. Jak vypadá ${}^{\mathcal{Y}}A$?

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Nechť dále

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & -3 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x - y = 0.$$

Najděte neparametrické rovnice všech přímek, které prochází bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, svírají s W_1 úhel $\frac{\pi}{2}$ a s W_2 úhel $\frac{\pi}{4}$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$.

Nechť ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ -\alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte signaturu Q v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Vyšetřete nulprostor Q v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Rozhodněte, pro jaká α existuje báze $\mathcal{A}$ taková, že ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. V takových případech bázi $\mathcal{A}$ najděte.