Zkoušková písemka LAA2 24.6.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^{\#}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{E}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nechť dále $P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(\vec{x}) = 0\}$ a $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin ve standardní bázi $\mathcal{E}$
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$
Najděte ON bázi $Q^\perp$ do P.

2. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, tj. se standardním skalárním součinem. Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje ortogonální $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ takový, že
$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det A > 0.$$
Pro takové operátory najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.
$$Q(\vec{x}) = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha+1)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete signaturu.
   (b) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete nulprostor.
   (c) Je-li Q singulární, najděte polární bázi Q.