Zkoušková písemka LAA2 12.6.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2,$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
$$W \equiv \begin{array}{rcl} 2x - y &=& 2 \\ 2y - z &=& 1 \end{array}.$$
Dále nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde
$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Najděte $\rho(A(W), A^{-1}(W))$.

2. Nechť $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor, tj. se standardním skalárním součinem. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, kde
$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} i & i & i \\ -2i & -2i & -i \\ 2i & i & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$ a ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$.
   (b) Najděte spektra $\sigma(A)$ a $\sigma(A^*)$.
   (c) Rozhodněte o diagonalizovatelnosti A a A^*.
   (d) Nechť dále $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{X}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Najděte $\vec{y} \in \mathbb{C}^3$ tak, aby $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť
$${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$
V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete nulprostor Q dvěma různými způsoby.