Zkoušková písemka LAA2 5.6.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ splňuje

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný? Pro takové případy najděte diagonální bázi, tedy bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$, pro kterou platí, že $^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice. Napište, čemu je rovno $^{\mathcal{Y}}A$.

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3,$$

pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$. Nechť

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}]_\alpha \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x + y = 1.$$

Spočítejte:

(a) úhel $\measuredangle W_1 W_2$,

(b) vzdálenost $\rho(W_1, W_2)$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$.

Nechť $^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & -2\alpha^2 \\ \alpha & -2\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte

(a) signaturu Q v závislosti na parametru α,

(b) nulprostor Q v závislosti na parametru α.