Zkoušková písemka LAA2 3.6.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, kde $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2},$$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nechť dále

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t + t^2 \\ x_2(t) &= 1 + t \\ x_3(t) &= 1. \end{aligned}$$

Najděte ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$ a vyšetřete vlastní čísla $(A^{-1})^*$ a jim příslušné vlastní vektory.

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Nechť

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha,$$

$$W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{x}) = 2\},$$

kde $(\varphi)_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Najděte parametrické rovnice všech příček W lineárních variet W_1 a W_2, které splňují:

- W prochází bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- $\measuredangle W W_1 = \frac{\pi}{3}$,
- $\measuredangle W W_2 = \frac{\pi}{3}$.

3. Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^4$

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = 2\alpha_1\beta_3 + 2\alpha_3\beta_1 - 2\alpha_2\beta_3 - 2\alpha_3\beta_2,$$

kde

$$(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix},\ (\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix},\ \mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Vyšetřete nulprostor N_h.