Datum sestavení dokumentu: 12. června 2013

Poznámky z přednášek lineární algebry A – LAA2

Ľubomíra Balková

e-mail: `lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz`

Obsah

1 Hodnost matice

Zatím známe pojem hodnost lineárního zobrazení. Nyní si zavedeme hodnost i pro matice a prozkoumáme její vlastnosti a souvislost s hodností lineárního zobrazení. T bude všude značit číselné těleso, m, n, p přirozená čísla.

Definice 1. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z T).* **Hodnost matice** *$h(\mathbb{A})$ je definována jako*

$$h(\mathbb{A}) = \dim\, [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda,$$

kde $\mathbb{A}_{\bullet j}$ značí j-tý sloupec matice $\mathbb{A}$.
Slovy: „$h(\mathbb{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$.“

Vyšetřování hodnosti matice je tedy podobné vyšetřování LZ a LN souboru vektorů. Matici upravíme do horního stupňovitého tvaru (z definice je jasné, že ekvivalentní řádkové úpravy hodnost matice nemění). Pak počet hlavních sloupců je roven hodnosti matice.

Příklad 1. *Spočtěte hodnost matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V horním stupňovitém tvaru jsou první, druhý a čtvrtý sloupec hlavní, tedy $h(\mathbb{A}) = 3$.

Poznámka 1. *Rozmyslete si, že jsou-li T', T tělesa a $T' \subset T$ a je-li $\mathbb{A} \in T'^{m,n}$ (tedy také $\mathbb{A} \in T^{m,n}$), pak pro hodnost $h(\mathbb{A})$ platí, že vyjde stejná, ať ji počítáme nad tělesem T', či T. Využijte faktu, že převod na horní stupňovitý tvar ekvivalentními řádkovými úpravami nemění hodnost matice.*

1.1 Vztah hodnosti matice a hodnosti lineárního zobrazení

Ukažme, jak úzce spolu hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení souvisí.

Věta 1 (Hodnost zobrazení a hodnost matice)**.** *Nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.*

Důkaz. Stačí, abychom rozepsali, co je $h(A)$ a co je $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

$$h(A) = \dim\, A(P_n) = \dim\, A[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \dim\, [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = \dim\, V,$$

kde $V = [A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

$$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim\, [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda = \dim\, W,$$

kde $W = [(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda$.

Je snadné nahlédnout, že souřadnicový izomorfismus $(.)_{\mathcal{Y}} : Q_m \to T^m$, který vektoru $\vec{y} \in Q_m$ přiřadí vektor $(\vec{y})_{\mathcal{Y}}$, zobrazuje V na W, proto W je izomorfní s V. Ze zimního semestru víme, že pro prostory W, V s konečnou dimenzí platí $W \cong V \Leftrightarrow \dim\, V = \dim\, W$. $\square$

Poznámka 2. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in T^n$. Pak zřejmě platí, že $\mathbb{A}$ je rovna matici A ve standardních bázích, tedy podle Věty 1 je $h(A) = h(\mathbb{A})$.*

1.2 Regulární a singulární matice

Nyní zavedeme pojem regulární matice, který se bude objevovat i v následujících kapitolách. Postupně vyslovíme tvrzení, která budou regulární matice charakterizovat pomocí různých vlastností: jednoznačnost řešení soustavy LAR, existence inverzní matice, nenulový determinant, nenulová vlastní čísla atd.

Definice 2. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n). Pak $\mathbb{A}$ se nazývá* **regulární**, *pokud $h(\mathbb{A}) = n$. V opačném případě se $\mathbb{A}$ nazývá* **singulární**.

Věta 2 (Izomorfismus a regulární matice)**.** *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ báze Q_n. Pak A je izomorfismus právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.*

Důkaz. Pro $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ ze zimního semestru z Věty o jednodušším ověření izomorfnosti zobrazení víme, že A je „na“ Q_n (tj. $h(A) = n$) právě tehdy, když A je izomorfismus. Pak už stačí použít Větu 1, která dává rovnost $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. □

Z Věty 2 plyne souvislost pojmů regulární operátor a regulární matice:

Důsledek 1 (Regulární operátor a regulární matice)**.** *Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n)$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n. Pak A je regulární operátor právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A$ je regulární matice.*

1.3 Frobeniova věta

Už ze zimního semestru umíme zjistit, zda má soustava lineárních algebraických rovnic (LAR) řešení, zda má více řešení, a jedno řešení umíme najít. Mnozí umí najít i všechna řešení soustavy LAR s pravou stranou – za neznámé odpovídající vedlejším sloupcům po převedení matice soustavy do horního stupňovitého tvaru volíme libovolně a zbylé neznámé dopočítáme. Frobeniova věta zformuluje elegantně pomocí nového pojmu hodnost matice podmínku řešitelnosti soustavy LAR s pravou stranou a prozradí počet LN řešení homogenní soustavy. Dále popíše tvar množiny všech řešení právě pomocí řešení homogenní soustavy.

Obvykle tečku $\cdot$ při násobení čísel i vektorů vynecháváme. Ve Frobeniově větě a jejím důkazu nikoliv, protože tak zdůrazňujeme rozdíl mezi součinem matice a vektoru $\mathbb{A} \cdot \vec{x}$ a působením zobrazení na vektor $A\vec{x}$.

Věta 3 (Frobeniova)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Nechť $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

platí:

1. *Soustava (1) má řešení právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, tj. právě tehdy, když hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*

2. *Označme S_0 množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$, tj. $S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$. Pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.*

3. *Nechť $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Pak množina všech řešení soustavy (1), tj. $S = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$, má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde $\mathbb{A} \cdot \vec{a} = \vec{b}$. Vektor $\vec{a}$ nazýváme* **partikulárním řešením**.

Důkaz. 1. Tvrzení plyne z následující série ekvivalencí:

$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ dim $[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda =$ dim $[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_\lambda$

$\Leftrightarrow$ $[\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda = [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}, \vec{b}]_\lambda$
(vlastnost podprostorů: je-li $P \subset\subset Q$ a dim $Q < +\infty$, pak dim $P =$ dim $Q \Leftrightarrow P = Q$)

$\Leftrightarrow$ $\vec{b} \in [\mathbb{A}_{\bullet 1}, \mathbb{A}_{\bullet 2}, \ldots, \mathbb{A}_{\bullet n}]_\lambda$ (vlastnost lineárních obalů)

$\Leftrightarrow$ existuje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in T$ tak, že $\alpha_1 \mathbb{A}_{\bullet 1} + \alpha_2 \mathbb{A}_{\bullet 2} + \cdots + \alpha_n \mathbb{A}_{\bullet n} = \vec{b}$
(plyne z definice lineárního obalu)

$\Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in T^n$ takový, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$
(plyne z definice maticového násobení)

$\Leftrightarrow$ soustava (1) má řešení

2. Nechť $A : T^n \to T^m$ je lineární zobrazení definované pro každé $\vec{x} \in T^n$ jako $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$. Pak pro S_0 platí:
$$S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in T^n | A\vec{x} = \vec{0}\} = \mathrm{ker} A.$$
Ze zimního semestru víme, že jádro lineárního zobrazení tvoří podprostor, tj. $S_0 \subset\subset T^n$, a z 2. věty o dimenzi víme, že dim $S_0 = d(A) = n - h(A) = n - h(\mathbb{A})$, kde poslední rovnost plyne z Poznámky 2.

3. Uvažujme zobrazení A z předchozího bodu. Jelikož z předpokladu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ plyne, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení, platí také, že $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení. Ze zimního semestru z Věty o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$ víme, že množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \mathrm{ker} A$, kde $\vec{b} = A\vec{a}$. A tedy $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{b} = \mathbb{A} \cdot \vec{a}$.

$\square$

Poznámka 3. *Zkontrolujme, že Frobeniova věta je v souladu s tím, co známe z praktického počítání.*

1. *Víme, že řešení existuje právě tehdy, když vektor pravé strany tvoří vedlejší sloupec po úpravě rozšířené matice soustavy do horního stupňovitého tvaru. Jelikož hodnost matice odpovídá počtu hlavních sloupců v horním stupňovitém tvaru, je vidět, že $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ je ekvivalentní s tím, že pravá strana tvoří vedlejší sloupec.*

2. *Umíme najít tolik LN řešení homogenní soustavy, kolik je vedlejších sloupců, a to je rovno $n - h(\mathbb{A})$, protože n je počet sloupců matice a $h(\mathbb{A})$ je počet hlavních sloupců matice.*

Z Frobeniovy věty lze odvodit ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 2. *Homogenní soustava s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má pouze triviální řešení, tj. pouze nulový vektor je řešením, právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.*

Důsledek 3. *Nechť $\vec{b} \in T^n$. Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární matice.*

Poznámka 4. *Množina řešení soustavy* (1) *je buď prázdná, nebo je to lineární varieta v T^n.*

1.4 Hodnost součinu matic

Pro hodnost součinu matic platí analogická věta jako pro hodnost složeného zobrazení.

Věta 4 (Hodnost součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Pak platí*

1. $h(\mathbb{AB}) \leq \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$,

2. *je-li $m = n$ a $\mathbb{A}$ regulární, pak $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{B})$,*

3. *je-li $n = p$ a $\mathbb{B}$ regulární, pak $h(\mathbb{AB}) = h(\mathbb{A})$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x} \in T^n$ definujme $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$ (tedy $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$), pak $h(A) = h(\mathbb{A})$ podle Poznámky 2. Pro každé $\vec{x} \in T^p$ definujme $B\vec{x} = \mathbb{B}\vec{x}$, (tedy $B \in \mathcal{L}(T^p, T^n)$), pak $h(B) = h(\mathbb{B})$. Potom $AB\vec{x} = (\mathbb{A}\mathbb{B})\vec{x}$, a tedy $h(AB) = h(\mathbb{A}\mathbb{B})$.
Ze zimního semestru z Věty o hodnosti složeného zobrazení víme:

1. $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,
2. $h(AB) = h(B)$, je-li A izomorfismus ($\Leftrightarrow n = m$ a A je regulární operátor z $\mathcal{L}(T^n)$, což je podle Důsledku 1 ekvivalentní s regularitou $\mathbb{A}$),
3. $h(AB) = h(A)$, je-li B izomorfismus ($\Leftrightarrow n = p$ a B je regulární operátor z $\mathcal{L}(T^n)$, což je podle Důsledku 1 ekvivalentní s regularitou $\mathbb{B}$).

Přímo z definic zobrazení A, B, AB získáme tvrzení věty. Vlastně v předchozích vztazích všude nahradíme zobrazení A, B maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. $\square$

Poznámka 5. *Nerovnost v 1. bodě Věty 4 může být ostrá. Nechť* $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, *pak* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Tedy* $0 = h(\mathbb{A}\mathbb{B}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\} = 1$.

1.5 Hodnost transponované matice

Velmi zajímavým netriviálním výsledkem je, že v každé matici je počet LN sloupců stejný jako počet LN řádků. K precizní formulaci tohoto tvrzení je třeba nejprve zavést pojem transponovaná matice a k důkazu budeme potřebovat také pojmy komplexně sdružená a hermitovsky sdružená matice.

Definice 3. *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$, *pak*

1. *matice* **transponovaná** *k matici* $\mathbb{A}$ *je typu* $n \times m$, *značí se* $\mathbb{A}^T$ *a splňuje pro každé* $i \in \widehat{n}$, $j \in \widehat{m}$
$$[\mathbb{A}^T]_{ij} := [\mathbb{A}]_{ji},$$
2. *matice* **komplexně sdružená** *k matici* $\mathbb{A}$ *je typu* $m \times n$, *značí se* $\overline{\mathbb{A}}$ *a splňuje pro každé* $i \in \widehat{m}$, $j \in \widehat{n}$
$$[\overline{\mathbb{A}}]_{ij} := \overline{[\mathbb{A}]_{ij}},$$
3. *matice* **hermitovsky sdružená** *k matici* $\mathbb{A}$ *je typu* $n \times m$, *značí se* $\mathbb{A}^H$ *a splňuje pro každé* $i \in \widehat{n}$, $j \in \widehat{m}$
$$[\mathbb{A}^H]_{ij} := \overline{[\mathbb{A}]_{ji}},$$
tj. $\mathbb{A}^H = \overline{\mathbb{A}^T}$.

Příklad 2. *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *pak* $\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^T$. *Nechť* $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$, *pak* $\overline{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -2i & 1-i & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}^H = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 5 (Vlastnosti transponovaných, komplexně sdružených a hermitovsky sdružených matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,p}$, *pak*

1. $\overline{\mathbb{A}^T} = \overline{\mathbb{A}}^T$, $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$, $(\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}$,
2. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$, $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\,\overline{\mathbb{B}}$, $(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H\mathbb{A}^H$.

Důkaz ponechán čtenáři. $\square$

Příklad 3. *Ověřte si předchozí vlastnosti na maticích* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Věta 6. *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. *Pak* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.
Slovy: „Každá komplexní matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Lemma 1. *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$. *Pak* $h(\mathbb{A}^H \mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$.

Důkaz. Označme

$$S_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}^H \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\} \text{ a } \tilde{S}_0 = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Ukážeme, že $S_0 = \tilde{S}_0$.

- $\tilde{S}_0 \subset S_0$: Tato inkluze platí, protože splňuje-li $\vec{x}$, že $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, pak $\mathbb{A}^H \mathbb{A}\vec{x} = \mathbb{A}^H \vec{0} = \vec{0}$.
- $\tilde{S}_0 \supset S_0$: Nechť $\vec{x} \in S_0$, pak $\mathbb{A}^H \mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$. Vynásobíme obě strany rovnosti zleva opruhovaným a transponovaným vektorem $\vec{x}$ (jde tedy o řádek). Potom $\vec{x}^H \mathbb{A}^H \mathbb{A}\vec{x} = 0$. Podle Věty 5 máme $\vec{x}^H \mathbb{A}^H = (\mathbb{A}\vec{x})^H$, odkud plyne $(\mathbb{A}\vec{x})^H \mathbb{A}\vec{x} = 0$. Jelikož $\mathbb{A}\vec{x} \in \mathbb{C}^m$, můžeme jeho složky označit $\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$. Pak $(\mathbb{A}\vec{x})^H = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m})$. Dostáváme

$$(\mathbb{A}\vec{x})^H \mathbb{A}\vec{x} = (\overline{z_1}\ \overline{z_2} \dots \overline{z_m}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_m|^2 = 0,$$

  odkud plyne, že $z_1 = z_2 = \dots = z_m = 0$, a tedy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{0}$, což znamená, že $\vec{x} \in \tilde{S}_0$.

Z Frobeniovy věty víme, že $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A}^H \mathbb{A})$ a $\dim \tilde{S}_0 = n - h(\mathbb{A})$. Jelikož $S_0 = \tilde{S}_0$, máme $n - h(\mathbb{A}^H \mathbb{A}) = n - h(\mathbb{A})$. □

Lemma 2. *Pro libovolnou matici* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$ *platí* $h(\mathbb{A}) = h(\overline{\mathbb{A}})$.

Důkaz. Ukažme, že $h(\mathbb{A}) \leq h(\overline{\mathbb{A}})$. Opačná nerovnost se ukáže analogicky (pouze si $\mathbb{A}$ a $\overline{\mathbb{A}}$ vymění role). Je-li $h(\mathbb{A}) = 0$, pak nerovnost platí triviálně. Je-li $h(\mathbb{A}) = k \in \mathbb{N}$, pak existují vzájemně různé indexy $j_1, j_2, \dots, j_k \in \hat{n}$ tak, že $(\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k})$ je LN soubor sloupců $\mathbb{A}$. Dokažme sporem, že pak $(\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k})$ je také LN soubor sloupců $\overline{\mathbb{A}}$, a tedy $h(\overline{\mathbb{A}}) \geq k$. Pokud je $(\overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_1}, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_2}, \dots, \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_k})$ LZ, pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, kde alespoň jedno z nich je nenulové a $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i} = \vec{0}$. Pak ale

$$\vec{0} = \overline{\sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\mathbb{A}}_{\bullet j_i}} = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i} \mathbb{A}_{\bullet j_i},$$

což je ovšem netriviální LK $(\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k})$ rovná nulovému vektoru, a tedy spor s LN $(\mathbb{A}_{\bullet j_1}, \mathbb{A}_{\bullet j_2}, \dots, \mathbb{A}_{\bullet j_k})$. □

Důkaz Věty 6. Na jednu stranu máme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^H \mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^H) = h(\overline{\mathbb{A}^T}) = h(\mathbb{A}^T)$, kde bylo v první rovnosti využito Lemma 1, v nerovnosti Věta 4 o hodnosti součinu matic, v další rovnosti definice hermitovsky sdružené matice a v poslední rovnosti Lemma 2. Na druhou stranu platí $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A}^H) = h(\mathbb{A}\mathbb{A}^H) \leq h(\mathbb{A})$, kde bylo v první rovnosti využito Lemma 2, ve druhé rovnosti Lemma 1 (místo $\mathbb{A}$ jsme v něm uvažovali $\mathbb{A}^H$) a v nerovnosti Věta 4 o hodnosti součinu matic. Dostali jsme tedy $h(\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^T) \leq h(\mathbb{A})$, proto $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$. □

Věta 7 (Hodnost transponované matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je libovolná matice s prvky z tělesa* T. *Pak* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.
Slovy: „Každá matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.“

Důkaz. Dokázali jsme větu pro speciální případ $T = \mathbb{C}$. Podle Poznámky 1 je ale hodnost matice s prvky z tělesa T stejná, ať ji počítáme nad tělesem T, či nad $\mathbb{C}$, proto tvrzení Věty 7 plyne z Věty 6. $\square$

Domácí úkol 1. *Řešení první úlohy je za* 1 *bod. Řešení druhé úlohy za* 2 *body. Řešení třetí úlohy za* 1 *bod.*

1. *Rozmyslete si, co musí splňovat těleso T, aby platilo Lemma 1 a Lemma 2 pro matici s prvky z T.*

2. *Vymyslete konkrétní těleso T, pro které Lemma 1 a Lemma 2 neplatí.*

3. *Důkaz rovnosti mezi hodností matice a matice k ní transponované lze provést také pomocí úpravy do horního stupňovitého tvaru, která hodnost nemění. Sami takový důkaz navrhněte. (Důkazu pomocí Lemmat 1 a 2 jsem dala přednost, protože jsme v něm využili svých čerstvých znalostí Frobeniovy věty a hodnosti součinu matic.)*

2 Inverzní matice a inverzní operátor

2.1 Inverzní matice

Připomeňme, že $\mathbb{I}$ značí jednotkovou matici, tedy čtvercovou matici s jedničkami na diagonále a nulami všude jinde.

Definice 4. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z tělesa T. Pokud existuje matice $\mathbb{B}$ s prvky z T tak, že $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{B}$ nazveme* **inverzní** *maticí k $\mathbb{A}$.*

Pozorování 1.

- *$\mathbb{A}$ musí být nutně čtvercová (plyne z pravidel pro násobení matic).*
- *Pro singulární matici inverzní neexistuje (plyne z Věty 4 o hodnosti součinu matic).*

Věta 8 (Existence inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.*

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

- Existence:
  Najdeme podobu inverzní matice $\mathbb{B}$ k matici $\mathbb{A}$. Uvažujme lineární operátor A definovaný pro každé $\vec{x} \in T^n$ jako $A\vec{x} = \mathbb{A}\vec{x}$. Takový operátor je podle Důsledku 1 regulární, a existuje tedy operátor k němu inverzní A^{-1}. Položíme-li $\mathbb{B} :=^{\mathcal{E}_n} (A^{-1})$, kde $\mathcal{E}_n$ je standardní báze T^n, pak snadno ověříme, že splňuje $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$. (Stačí si uvědomit, že $\mathbb{A} =^{\mathcal{E}_n} A$.)
- Jednoznačnost:
  Nechť $\mathbb{X}$ je také inverzní matice k $\mathbb{A}$, tedy $\mathbb{XA} = \mathbb{AX} = \mathbb{I}$. Pak
  $$\mathbb{X} = \mathbb{XI} = \mathbb{X}(\mathbb{AB}) = (\mathbb{XA})\mathbb{B} = \mathbb{IB} = \mathbb{B}.$$

□

Nyní, když víme, že pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, má smysl ji nějak označit. Obvyklé je značení $\mathbb{A}^{-1}$.

Z Věty 8 a z faktu, že singulární matice nelze invertovat, plyne nová ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 4. *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ s prvky z tělesa T je regulární, právě když existuje $\mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 9 (Vlastnosti inverzních matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou čtvercové matice stejného řádu s prvky z tělesa T.*

1. *Pokud $\mathbb{AB} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
2. *Pokud $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
3. *Platí $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.*
4. *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice. Pak $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$ a $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.*
5. *Je-li $\vec{b} \in T^n$, pak soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ s regulární maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, a to $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.*

Důkaz.

1. Regularita $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ plyne z Věty 4. Podle Věty 8 pak existuje $\mathbb{A}^{-1}$ a platí $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\,\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}(\mathbb{AB}) = (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{I}\,\mathbb{B} = \mathbb{B}$.
2. Regularita $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ plyne z Věty 4. Podle Věty 8 pak existuje $\mathbb{A}^{-1}$ a platí $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}\,\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{BA})\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{B}(\mathbb{AA}^{-1}) = \mathbb{B}\,\mathbb{I} = \mathbb{B}$.

3. Tvrzení plyne z rovnosti $\mathbb{I}\mathbb{I} = \mathbb{I}$ užitím 1. bodu.

4. První tvrzení plyne z rovnosti $(\alpha\mathbb{A})(\frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}) = (\alpha\frac{1}{\alpha})(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{I}$ užitím 1. bodu. Druhé tvrzení plyne z rovnosti $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ užitím 1. bodu.

5. Z Důsledku 3 víme, že existuje jediné řešení. Dosazením snadno ověříme, že $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$ je řešení.

□

Věta 10 (Inverzní matice k součinu matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární matice řádu n s prvky z tělesa T. Pak také matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

Důkaz. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{B}(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1})\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}\mathbb{I}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle 1. bodu Věty 9, že $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$. □

2.2 Praktický výpočet $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$ – úplná Gaussova eliminace

Abychom pochopili, proč funguje úplná Gaussova eliminace, musíme si nejprve uvědomit, že řádkové úpravy v matici odpovídají násobení vhodnou maticí zleva.

Lemma 3. *Nechť $\mathbb{X} \in T^{m,n}$. Provedeme-li ekvivalentní řádkovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{T}\mathbb{X}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnou řádkovou úpravou.*

Důkaz. Čtenář snadno ověří, že je tvrzení pravdivé pro všechny ekvivalentní řádkové úpravy:

1. záměna řádků,

2. vynásobení řádku nenulovým číslem z T,

3. přičtení násobku jiného řádku k vybranému řádku.

□

Věta 11 (Ekvivalentní řádkové úpravy a násobení maticí)**.** *Nechť $\mathbb{X} \in T^{m,n}$. Provedeme-li konečný počet ekvivalentních řádkových úprav, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{T}\mathbb{X}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými ekvivalentními řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí.*

Důkaz. Provedeme-li v $\mathbb{X}$ k ekvivalentních řádkových úprav (EŘÚ), je výsledná matice rovna podle Lemmatu 3

$$\mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{X},$$

kde $\mathbb{T}_i$ je matice vzniklá z jednotkové i-tou EŘÚ. Označme $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1$, pak $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k \dots \mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{I}$ a podle Lemmatu 3 vidíme, že $\mathbb{T}$ vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými k EŘÚ provedenými ve stejném pořadí. □

Příklad 4. *V matici $\mathbb{X}$ provádíme EŘÚ: záměna 1. a 2. řádku, přičtení 1. řádku k 2. řádku, vynásobení 3. řádku číslem 2. Ověřte, že vzniklá matice je rovna $\mathbb{T}\mathbb{X}$, kde $\mathbb{T}$ vznikla stejnými řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí z jednotkové matice, tj.*

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{T}\mathbb{X}, \quad \textit{kde } \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 12 (Úplná Gaussova eliminace)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární a $\mathbb{B} \in T^{n,m}$. Pak $\mathbb{A}$ lze převést ekvivalentními řádkovými úpravami na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ ekvivalentními řádkovými úpravami do tvaru $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$, pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.*

Symbolicky zapsáno

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim \left(\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}\right).$$

Důkaz. $\mathbb{A}$ po převedení EŘÚ do horního stupňovitého tvaru má na diagonále samá nenulová čísla díky regularitě. Poté každý řádek vydělíme odpovídajícím číslem na diagonále, čímž dostaneme na diagonále jedničky. A nad diagonálou již snadno EŘÚ vyrobíme nuly – nejprve v předposledním řádku odečtením odpovídajícího násobku posledního řádku, poté ve třetím řádku od konce odečtením vhodné lineární kombinace posledního a předposledního řádku atd.

K důkazu druhé části věty si stačí uvědomit, že $\mathbb{I}$ vznikla EŘÚ z $\mathbb{A}$ a že $\mathbb{X}$ vznikla stejnými EŘÚ provedenými ve stejném pořadí z $\mathbb{B}$. Z Věty 11 plyne, že existuje $\mathbb{T}$ tak, že $\mathbb{I} = \mathbb{T}\mathbb{A}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{T}\mathbb{B}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{T} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 6. *Slovo úplná naznačuje, že narozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí EŘÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a EŘÚ vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud neskončíme u jednotkové matice.*

Úplnou Gaussovu eliminaci budeme používat k řešení následujících úloh ($\mathbb{A}$ je regulární a ostatní matice jsou správného rozměru):

1. hledání $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$,
2. hledání $\mathbb{A}^{-1}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\mathbb{I}$ v předchozím případě,
3. hledání $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\vec{b}$,
4. hledání $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$, pak využijeme metody:
$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{X}^T\right) \sim \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^T)^{-1}\mathbb{X}^T\right) = \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{X}^T\right)$$
a transponováním výsledné matice $(\mathbb{A}^{-1})^T\mathbb{X}^T$ pak získáme hledanou matici $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$.

Příklad 5. *Jsou dány matice*
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{X}\mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste spočetli $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pak pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.

Řešení:

$$(a) \quad (\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$(b) \quad \left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{X}^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{X}\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$(c) \quad (\mathbb{A} \mid \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy } \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Domácí úkol 2 (Sloupcová analogie úplné Gaussovy eliminace za 2 body)**.** *Zformulujte a dokažte analogickou větu, jako je Věta 11, pro ekvivalentní sloupcové úpravy. Tedy je třeba definovat ekvivalentní sloupcové úpravy a vymyslet, násobení jakou maticí a z které strany odpovídají. Poté vyslovte pro úplnou Gaussovu eliminaci ve sloupcovém tvaru větu analogickou Větě 12. Ilustrujte sloupcovou metodu na konkrétním příkladu.*

2.3 Inverzní operátor

Ze zimního semestru víme, že pokud V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$ je regulární operátor, pak $A^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ a platí $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, kde I značí identický operátor (tedy $I\vec{x} = \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in V$).

Věta 13 (Existence inverzního operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Pokud existuje $B \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $AB = I$, pak A je „na V“.*
2. *Pokud existuje $C \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $CA = I$, pak A je prostý.*
3. *Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ splňující $AB = I = CA$, pak A je regulární operátor a $A^{-1} = B = C$.*

Důkaz.
1. Chceme dokázat, že pro každé $\vec{y} \in V$ existuje $\vec{x} \in V$ tak, že $A\vec{x} = \vec{y}$. Stačí položit $\vec{x} := B\vec{y}$.
2. Chceme dokázat, že v jádru A je jen $\vec{0}$. Bereme libovolný $\vec{x} \in \ker A$. Pak $(CA)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$ a zároveň $(CA)\vec{x} = C(A\vec{x}) = C\vec{0} = \vec{0}$, proto $\vec{x} = \vec{0}$.
3. Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ splňující $AB = I = CA$, pak je podle bodů 1. a 2. A regulární operátor. Pak existuje A^{-1} a platí $A^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$ a $A^{-1} = IA^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CI = C$.

□

Operátor B z Věty 13 nazveme **pravý inverzní operátor** k A a C nazveme **levý inverzní operátor** k A.

Důsledek 5. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Je-li $A \in \mathcal{L}(V)$ regulární operátor, pak $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Důkaz. Jelikož $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, je A levý i pravý inverzní operátor k A^{-1}, tedy podle Věty 13 A je inverzní operátor k A^{-1}. □

Poznámka 7. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T.*

- *Je-li* $\dim V < +\infty$*, pak $A \in \mathcal{L}(V)$ je regulární operátor právě tehdy, když je prostý nebo „na V“. Jakmile tedy existuje B pravý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = B$. Analogicky jakmile existuje C levý inverzní operátor k A, pak je A regulární a $A^{-1} = C$.*
- *Je-li* $\dim V = +\infty$*, pak z existence pouze levého či pouze pravého inverzního operátoru neplyne existence inverzního operátoru. Například pro operátory derivování a integrování $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ platí $DS = I$, ale $SD \neq I$.*

Věta 14 (Inverzní operátor ke složení operátorů)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V)$ a A i B jsou regulární operátory. Pak AB je regulární operátor a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Důkaz. Podle Věty 13 stačí ověřit, že $B^{-1}A^{-1}$ je pravým i levým inverzním operátorem k AB.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

□

Věta 15 (Inverzní operátor a inverzní matice)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ je regulární operátor. Pak platí*

$$^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = (^{\mathcal{X}}A)^{-1}.$$

Důkaz. S využitím Věty 9 plyne z rovnosti $^{\mathcal{X}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}A =^{\mathcal{X}} (A^{-1}A) =^{\mathcal{X}} I = \mathbb{I}$, že $^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = (^{\mathcal{X}}A)^{-1}$. □

Definice 5. *Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Pak* **maticí přechodu** *od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ nazveme matici ${}_{\mathcal{X}}\mathbb{P}_{\mathcal{Y}} =^{\mathcal{X}} I^{\mathcal{Y}}$.*

Věta 16. *Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T. Pak platí*

1. $({}_{\mathcal{X}}\mathbb{P}_{\mathcal{Y}})^{-1} =_{\mathcal{Y}} \mathbb{P}_{\mathcal{X}}$,
2. $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} =_{\mathcal{X}} \mathbb{P}_{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ *pro každé $\vec{x} \in V_n$.*

Důkaz ponechán čtenáři. □

3 Permutace a determinanty

Abychom mohli zavést pojem determinant matice, musíme nejprve vysvětlit několik pojmů z teorie permutací.

3.1 Permutace

Definice 6. *Nechť n značí přirozené číslo. Každou bijekci (zobrazení prosté a „na“) $\pi : \widehat{n} \to \widehat{n}$ nazýváme* **permutací** *na $\widehat{n}$. Množinu všech permutací na $\widehat{n}$ značíme S_n.*

Poznámka 8. *Rozmyslete si, že množina S_n má $n!$ prvků.*

Poznámka 9. *Permutace obvykle zapisujeme tabulkou s dvěma řádky $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, případně jediným řádkem $\pi_1 = (4\ 3\ 1\ 2)$. Obojí znamená, že $\pi_1(1) = 4,\ \pi_1(2) = 3,\ \pi_1(3) = 1,\ \pi_1(4) = 2$.*

Příklad 6. *Nechť $\pi_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte*

$$\pi_1 \circ \pi_2,\ \pi_2^2 = \pi_2 \circ \pi_2,\ \pi_2 \circ \pi_1,$$

kde $\circ$ značí skládání. Dále si uvědomte, že $\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. (Získá se tedy prohozením řádků v dvouřádkovém zápisu.)

Definice 7. *Nechť $\pi \in S_n$, pak* **inverzí** *v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) splňující:*

- $i, j \in \widehat{n}$,
- $i < j$,
- $\pi(i) > \pi(j)$.

Počet inverzí v π značíme I_π. **Znaménkem** *permutace π nazveme číslo $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{I_\pi}$. Říkáme, že π je* **sudá** *permutace, pokud $\operatorname{sgn}\pi = 1$, a* **lichá**, *pokud $\operatorname{sgn}\pi = -1$.*

Poznámka 10. *Identická permutace je sudá permutace, protože počet inverzí v ní je roven 0. Značíme ji ϵ.*

Příklad 7. *Rozmyslete si, že S_n pro $n \geq 2$ obsahuje vždy stejný počet sudých a lichých permutací.*

Příklad 8. *Určete počet inverzí v π_1 a najděte $\operatorname{sgn}\pi_1$.*
Řešení: *Podívejme se na všechny uspořádané dvojice (i, j), kde $i, j \in \widehat{4}$ a $i < j$, a ověřme, zda $\pi(i) > \pi(j)$.*

(i,j)	$(\pi(i), \pi(j))$	$\pi(i) > \pi(j)$
$(1,2)$	$(4,3)$	✓
$(1,3)$	$(4,1)$	✓
$(1,4)$	$(4,2)$	✓
$(2,3)$	$(3,1)$	✓
$(2,4)$	$(3,2)$	✓
$(3,4)$	$(1,2)$	

.

Závěr: *Počet inverzí $I_{\pi_1} = 5$, proto $\operatorname{sgn}\pi_1 = (-1)^5 = -1$.*

Definice 8. *Nechť $n \geq 2$ a $i, j \in \widehat{n}$, $i \neq j$.* **Transpozicí** *čísel i a j nazveme permutaci τ_{ij} splňující*

- $\tau_{ij}(k) = k$ *pro* $k \neq i, j$,

- $\tau_{ij}(i) = j$,
- $\tau_{ij}(j) = i$,

tj. zapsáno pomocí tabulky

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Příklad 9. *Napište více způsoby π_1 jako složení transpozic.*
Řešení: *Stačí si uvědomit, že když složíme permutaci s transpozicí, dostaneme*

$$\pi \circ \tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(i-1) & \pi(j) & \pi(i+1) & \dots & \pi(j-1) & \pi(i) & \pi(j+1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

A teď si představíme, jak získáme π_1 z ϵ.

- $\epsilon \circ \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{13} \circ \tau_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{13} \circ \tau_{24} \circ \tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dostáváme tedy $\pi_1 = \tau_{13} \circ \tau_{24} \circ \tau_{12}$.
Nebo jiný způsob:

- $\epsilon \circ \tau_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{14} \circ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\epsilon \circ \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dostáváme tedy $\pi_1 = \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34}$. Také například $\pi_1 = \tau_{14} \circ \tau_{23} \circ \tau_{34} \circ \tau_{12} \circ \tau_{12}$, protože $\tau_{12} \circ \tau_{12} = \epsilon$.

Věta 17 (Rozklad permutace na transpozice)**.** *Každá permutace je složením konečného počtu transpozic a platí* $\mathrm{sgn}\pi = (-1)^k$ *pro $\pi = \tau^{(1)} \circ \tau^{(2)} \circ \dots \circ \tau^{(k)}$, kde $\tau^{(i)}$ jsou transpozice.*

Důkaz. Větu ponecháme bez důkazu. Ten přijde později v předmětu Algebra. □

Poznámka 11. *Při zapisování π_1 jako složení transpozic jsme viděli, že rozklad na transpozice není jednoznačný a že ani počet transpozic v rozkladu není jednoznačný. Z Věty 17 se dozvídáme, že jednoznačná je parita počtu transpozic v rozkladu permutace, tj. sudost či lichost.*

Poznámka 12. *Transpozice je lichá permutace, jak plyne z Věty 17. Dále z ní opět plyne, že identická permutace $\epsilon \in S_n$ pro $n \geq 2$ je sudá, protože $\epsilon = \tau_{12} \circ \tau_{12}$.*

Důsledek 6. *Nechť $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Pak* $\mathrm{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{sgn}\pi_1 \cdot \mathrm{sgn}\pi_2$.

Důkaz. Nechť π_1 je složením k transpozic $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(k)}$ a π_2 je složením ℓ transpozic $\widehat{\tau}^{(1)}, \widehat{\tau}^{(2)}, \dots, \widehat{\tau}^{(\ell)}$. Pak

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \tau^{(1)} \circ \tau^{(2)} \circ \dots \circ \tau^{(k)} \circ \widehat{\tau}^{(1)} \circ \widehat{\tau}^{(2)} \circ \dots \circ \widehat{\tau}^{(\ell)}$$

a podle Věty 17 máme $\mathrm{sgn}\pi_1 = (-1)^k$, $\mathrm{sgn}\pi_2 = (-1)^\ell$ a $\mathrm{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = (-1)^{k+\ell}$, odtud plyne $\mathrm{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{sgn}\pi_1 \cdot \mathrm{sgn}\pi_2$. □

Důsledek 7. *Nechť $\pi \in S_n$. Pak* $\mathrm{sgn}\pi = \mathrm{sgn}\pi^{-1}$.

Důkaz. Jelikož $\pi \circ \pi^{-1} = \epsilon$ a identita má znaménko 1, máme podle předchozího důsledku $\mathrm{sgn}\pi \cdot \mathrm{sgn}\pi^{-1} = 1$, a tedy π a π^{-1} mají stejné znaménko. □

3.2 Determinant matice

V celé kapitole uvažujeme výhradně čtvercové matice, n značí přirozené číslo a T značí těleso.

Definice 9. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$*. Pak* **determinantem matice** $\mathbb{A}$ *nazveme číslo*

$$\det\mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)}\mathbb{A}_{2\pi(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme **členy determinantu***.*

Poznámka 13. *Počet sčítanců je $n!$. (Víme, že právě tolik je permutací na $\widehat{n}$, tedy prvků množiny S_n.) V každém členu se objevuje z každého řádku a každého sloupce matice právě jeden prvek.*

Příklad 10. *Odvoďme podle definice, jak vypadají determinanty matic řádu $1, 2, 3$.*

- *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} \end{pmatrix}$*. Na $\widehat{1}$ máme jedině identickou permutaci (1) se znaménkem 1, proto* $\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}$.
- *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} \end{pmatrix}$*. Na $\widehat{2}$ máme dvě permutace $\epsilon = (1,2)$, resp. $\tau_{12} = (2,1)$, se znaménky 1, resp. -1, proto* $\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}$.
- *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{33} \end{pmatrix}$*. Na $\widehat{3}$ máme šest permutací*

  $$\pi_1 = \epsilon = (1,2,3),\ \pi_2 = (3,1,2),\ \pi_3 = (2,3,1),\ \pi_4 = (1,3,2),\ \pi_5 = (3,2,1),\ \pi_6 = (2,1,3),$$

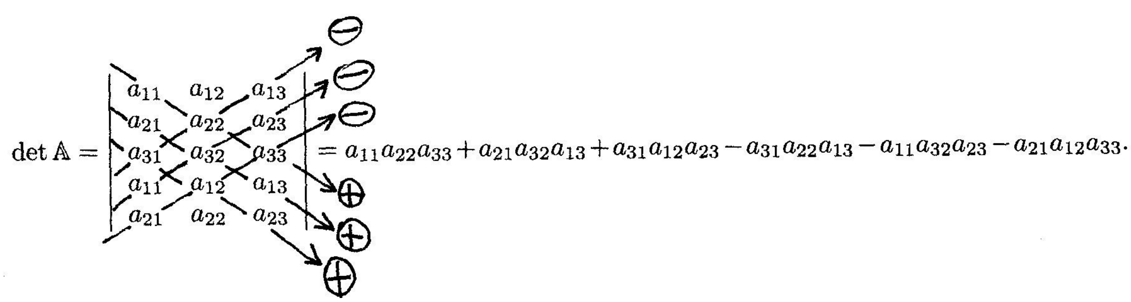
  se znaménky $\operatorname{sgn}\pi_1 = \operatorname{sgn}\pi_2 = \operatorname{sgn}\pi_3 = 1$ *a* $\operatorname{sgn}\pi_4 = \operatorname{sgn}\pi_5 = \operatorname{sgn}\pi_6 = -1$*, proto*

  $$\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{33} + \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{32} + \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{23}\mathbb{A}_{32} - \mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{31} - \mathbb{A}_{12}\mathbb{A}_{21}\mathbb{A}_{33}.$$

Vzorce pro determinanty matic řádu $2, 3$ lze získat také pomocí tzv. **Sarrusova pravidla***, jak ilustruje obrázek 1 pro matici řádu 3. Pro výpočet determinantu matice řádu 2 stačí nakreslit jednu šipku směrem vpravo dolů a druhou směrem vpravo nahoru a aplikovat stejné pravidlo pro znaménka.*

Pro matice vyšších řádů pravidlo užít nejde. Sami si rozmyslete, že sepsáním řádků a spojováním prvků šipkami už nevyrobíme všechny členy determinantu (např. pro řád 4 dostaneme jen 8 různých součinů, ale členů determinantu je 24).

Často budeme pro značení determinantu využívat svislé čáry, právě jako na obrázku 1.



Obrázek 1: Součin prvků matice spojených šipkami směrem vpravo dolů má v determinantu znaménko plus, součin prvků spojených šipkami směrem vpravo nahoru má v determinantu znaménko mínus.

Věta 18 (Determinant transponované matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Pak* $\det\mathbb{A}^T = \det\mathbb{A}$.

Důkaz. Nechť $\mathbb{A}$ je řádu n.

$$\begin{aligned} \det\mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \ \mathbb{A}^T_{1\pi(1)}\mathbb{A}^T_{2\pi(2)}\dots\mathbb{A}^T_{n\pi(n)} && \text{(definice determinantu)} \\ &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \ \mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n} && \text{(definice } \mathbb{A}^T\text{)}. \end{aligned}$$

Protože pro libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ platí $\pi^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi^{-1}(1) & \pi^{-1}(2) & \dots & \pi^{-1}(n) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{smallmatrix}\right)$, je zřejmé, že $\mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n} = \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)}\mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)}$ (součin stejný je, ale pořadí činitelů nemusí být). Využijeme ještě faktu, že $\operatorname{sgn}\pi = \operatorname{sgn}\pi^{-1}$ a že $S_n = \{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\}$, a můžeme psát

$$\begin{aligned} \det\mathbb{A}^T &= \textstyle\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi^{-1} \ \mathbb{A}_{1\pi^{-1}(1)}\mathbb{A}_{2\pi^{-1}(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi^{-1}(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ \mathbb{A}_{1\sigma(1)}\mathbb{A}_{2\sigma(2)}\dots\mathbb{A}_{n\sigma(n)} \\ &= \det\mathbb{A}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 14. *Z předchozího důkazu si zapamatujme, že vzorec*

$$\det\mathbb{A} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi \ \mathbb{A}_{\pi(1)1}\mathbb{A}_{\pi(2)2}\dots\mathbb{A}_{\pi(n)n}$$

můžeme také považovat za definici determinantu.

Nyní představíme třídu matic, pro které je snadné spočíst determinant.

Definice 10. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- $\mathbb{A}$ *nazveme* **horní trojúhelníkovou maticí***, pokud pro každé* $i, j \in \widehat{n},\ i > j$ *platí* $\mathbb{A}_{ij} = 0$. *Slovy: „$\mathbb{A}$ má pod diagonálou samé nuly.“*

- $\mathbb{A}$ *nazveme* **dolní trojúhelníkovou maticí***, pokud pro každé* $i, j \in \widehat{n},\ i < j$ *platí* $\mathbb{A}_{ij} = 0$. *Slovy: „$\mathbb{A}$ má nad diagonálou samé nuly.“*

Poznámka 15. *Rozmyslete si, že pro čtvercovou matici* $\mathbb{A}$ *platí:*

- *Je-li* $\mathbb{A}$ *v horním stupňovitém tvaru, pak je i v horním trojúhelníkovém tvaru.*

- *Je-li* $\mathbb{A}$ *v horním trojúhelníkovém tvaru, pak nemusí být v horním stupňovitém tvaru. Například* $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *je v horním trojúhelníkovém, ale není v horním stupňovitém tvaru.*

Věta 19 (Determinant trojúhelníkových matic)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\mathbb{A}$ *je horní či dolní trojúhelníková. Pak* $\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\dots\mathbb{A}_{nn}$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení pro horní trojúhelníkové matice, pro dolní trojúhelníkové je důkaz analogický. Určíme, jak musí vypadat permutace π na $\widehat{n}$, aby jí odpovídající člen determinantu $\operatorname{sgn}\pi \ \mathbb{A}_{1\pi(1)}\mathbb{A}_{2\pi(2)}\dots\mathbb{A}_{n\pi(n)}$ nebyl nutně nulový.

1. Zcela jistě $\pi(n) = n$, kdyby totiž $\pi(n) = j < n$, pak by se ve členu determinantu vyskytoval prvek $\mathbb{A}_{nj}$ nacházející s v matici pod diagonálou, a tedy $\mathbb{A}_{nj} = 0$.

2. Dále $\pi(n-1) = n-1$. Není možné, aby $\pi(n-1) = n$, protože by π nebyla permutace, a když $\pi(n-1) = j < n-1$, pak $\mathbb{A}_{(n-1)j} = 0$.

3. Analogickými úvahami dostaneme, že $\pi = \epsilon$.

Tedy všem permutacím, které nejsou identické, odpovídá v determinantu nulový člen. Odtud již plyne $\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22}\dots\mathbb{A}_{nn}$. □

Determinanty matic řádů vyšších než 3 budeme počítat tak, že matice pomocí řádkových a sloupcových úprav převedeme do trojúhelníkového tvaru, aniž by se determinant změnil, a pak užijeme faktu, že determinant trojúhelníkové matice je součin prvků na diagonále.

Věta 20 (Řádkové a sloupcové úpravy determinantů)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Pak platí:*

1. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *násobením některého řádku (sloupce) matice* $\mathbb{A}$ *číslem* α*, pak* $\det\mathbb{B} = \alpha\det\mathbb{A}$.
2. *Je-li některý řádek (sloupec)* $\mathbb{A}$ *nulový, pak* $\det\mathbb{A} = 0$.
3. *Označme* $\mathbb{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{p}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$ *a* $\mathbb{B} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{q}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$*, pak* $\det\mathbb{A} + \det\mathbb{B} = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{p} + \vec{q}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_n)$*. Analogické tvrzení platí pro řádky.*
4. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *z* $\mathbb{A}$ *prohozením dvou řádků (sloupců),* $\det\mathbb{B} = -\det\mathbb{A}$.
5. *Má-li* $\mathbb{A}$ *dva řádky (sloupce) stejné, pak* $\det\mathbb{A} = 0$.
6. *Připočteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice* $\mathbb{A}$ *libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.*

Důkaz. U každého tvrzení dokážeme jen řádkovou variantu. Sloupcová varianta pak plyne z Věty 18, tedy z faktu, že determinant matice a matice k ní transponované jsou stejné.

1. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením i-tého řádku číslem α, pak

$$\begin{aligned} \det\mathbb{B} &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots (\alpha\mathbb{A}_{i\pi(i)}) \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \alpha\det\mathbb{A}. \end{aligned}$$

2. Má-li $\mathbb{A}$ i-tý řádek nulový, pak pro každou permutaci π na $\widehat{n}$ je prvek $\mathbb{A}_{i\pi(i)} = 0$, proto každý člen determinantu $\mathbb{A}$ je nulový.

3. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ záměnou i-tého a j-tého řádku, pak

$$\begin{aligned} \det\mathbb{B} &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{B}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{B}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{B}_{j\pi(j)} \ldots \mathbb{B}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{A}_{j\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{i\pi(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} -\mathrm{sgn}(\pi\circ\tau_{ij})\ \mathbb{A}_{1(\pi\circ\tau_{ij})(1)} \ldots \mathbb{A}_{i(\pi\circ\tau_{ij})(i)} \ldots \mathbb{A}_{j(\pi\circ\tau_{ij})(j)} \mathbb{A}_{n(\pi\circ\tau_{ij})(n)} \\ &= -\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}\sigma\ \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \ldots \mathbb{A}_{i\sigma(i)} \ldots \mathbb{A}_{j\sigma(j)} \ldots \mathbb{A}_{n\sigma(n)} \\ &= -\det\mathbb{A}. \end{aligned}$$

4. Nechť má matice $\mathbb{A}$ stejný i-tý a j-tý řádek, pak matice, která vznikne záměnou i-tého a j-tého řádku, je opět matice $\mathbb{A}$. Podle předchozího bodu platí, že $\det\mathbb{A} = -\det\mathbb{A}$, proto $\det\mathbb{A} = 0$.

5. Dokažme tvrzení pro řádky, tedy značme $\vec{p}^{\,T}$ i-tý řádek $\mathbb{A}$, $\vec{q}^{\,T}$ i-tý řádek $\mathbb{B}$, kde $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ mají ostatní řádky stejné. Jako $\mathbb{C}$ označme matici, která má v i-tém řádku $(\vec{p} + \vec{q})^T$ a všechny ostatní řádky má stejné jako $\mathbb{A}$. Pak

$$\begin{aligned} \det\mathbb{C} &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi\ \mathbb{C}_{1\pi(1)} \ldots \mathbb{C}_{i\pi(i)} \ldots \mathbb{C}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots (p_{\pi(i)} + q_{\pi(i)}) \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots p_{\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} + \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \ldots q_{\pi(i)} \ldots \mathbb{A}_{n\pi(n)} \\ &= \det\mathbb{A} + \det\mathbb{B}. \end{aligned}$$

6. Nechť $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ přičtením α-násobku j-tého řádku k i-tému řádku pro $i \neq j$, pak tvrzení plyne z 3., 1. a 5. bodu.

□

Důsledek 8. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\alpha \in T$. *Nechť* $\mathbb{B} = \alpha\mathbb{A}$, *pak* $\det\mathbb{B} = \alpha^n \det\mathbb{A}$.

Důkaz. Matice $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ vynásobením každého řádku číslem α, tvrzení tedy plyne z 1. bodu Věty 20. $\square$

Příklad 11. *Pomocí řádkových úprav spočítejte determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -54.$$

Zavedeme pojem n-lineární antisymetrická forma, abychom ukázali, že determinant je příkladem takové formy.

Definice 11. *Nechť* V *je vektorový prostor nad* T. *Pak* $w : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \text{ krát}} \to T$ *je*

- **n-lineární** *forma na* V, *pokud pro každé* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ *a* $\alpha \in T$ *a pro každé* $i \in \hat{n}$ *platí*

  $$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \alpha\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) = \alpha w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) + w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n),$$

- **antisymetrická** *forma na* V, *pokud pro každé* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ *a pro každé* $i, j \in \hat{n}, i \neq j$ *platí*

  $$w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n).$$

Důsledek 9. *Vnímáme-li determinant jako funkci sloupců matice* $\det : \underbrace{T^n \times T^n \times \cdots \times T^n}_{n \text{ krát}} \to T$, *pak je* $\det$ *n-lineární antisymetrická forma na* T^n.

Důkaz. Antisymetrie je důsledkem 5. bodu a n-linearita 1. a 6. bodu Věty 20. $\square$

Nyní vyslovíme sérii tvrzení, která nám pomohou dokázat další důležitou vlastnost determinantů – determinant součinu matic je roven součinu determinantů jednotlivých matic.

Lemma 4. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Nechť* $\mathbb{T}$ *vznikne z* $\mathbb{I}$ *řádu* n *nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že* $\det(\mathbb{T}\mathbb{A}) = \det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$.

Důkaz. Označme $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{A}$. Podle Lemmatu 3 vznikla $\mathbb{B}$ z $\mathbb{A}$ stejnou EŘÚ jako $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$. S využitím Věty 20 o řádkových a sloupcových úpravách determinantů máme následující tvrzení.

1. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ vynásobením nějakého řádku nenulovým číslem α, pak $\det\mathbb{B} = \alpha\det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{T} = \alpha\det\mathbb{I} = \alpha$.
2. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ záměnou dvou řádků, pak $\det\mathbb{B} = -\det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{T} = -\det\mathbb{I} = -1$.
3. Vznikne-li $\mathbb{T}$ z $\mathbb{I}$ přičtením násobku jiného řádku k vybranému řádku, pak $\det\mathbb{B} = \det\mathbb{A}$ a $\det\mathbb{T} = \det\mathbb{I} = 1$.

Ve všech třech případech tedy platí $\det\mathbb{B} = \det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$. □

Věta 21. *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Nechť $\mathbb{T}$ vznikne z $\mathbb{I}$ řádu n konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak* $\det(\mathbb{T}\mathbb{A}) = \det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$.

Důkaz. Nechť $\mathbb{T}_i$ je matice, která vznikla z $\mathbb{I}$ provedením i-té EŘÚ. Pak podle Lemmatu 3 platí $\mathbb{T} = \mathbb{T}_k\mathbb{T}_{k-1}\ldots\mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{I}$. Opakovanou aplikací Lemmatu 4 dostaneme

$$\det\mathbb{T} = \det\mathbb{T}_k\det\mathbb{T}_{k-1}\ldots\det\mathbb{T}_2\det\mathbb{T}_1\det\mathbb{I} = \det\mathbb{T}_k\det\mathbb{T}_{k-1}\ldots\det\mathbb{T}_2\det\mathbb{T}_1.$$

Zároveň $\mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{T}_k\mathbb{T}_{k-1}\ldots\mathbb{T}_2\mathbb{T}_1\mathbb{A}$, proto opět opakovanou aplikací Lemmatu 4 dostaneme $\det(\mathbb{T}\mathbb{A}) = \det\mathbb{T}_k\det\mathbb{T}_{k-1}\ldots\det\mathbb{T}_2\det\mathbb{T}_1\det\mathbb{A}$. Tím je dokázáno, že $\det(\mathbb{T}\mathbb{A}) = \det\mathbb{T}\det\mathbb{A}$. □

Poznámka 16. *Z důkazu předchozí věty plyne, že determinant matice, která vznikne z $\mathbb{I}$ konečným počtem EŘÚ, je nenulový. Je totiž součinem determinantů matic, které vznikly jednou EŘÚ z $\mathbb{I}$. Tyto determinanty jsou tedy rovny -1 (záměna řádků), 1 (přičtení násobku jiného řádku k vybranému) nebo α (vynásobení řádku nenulovým číslem α).*

Věta 22 (Regulární matice a determinant)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. $\mathbb{A}$ je regulární, právě když* $\det\mathbb{A} \neq 0$.

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nechť $\mathbb{A}$ je regulární, pak $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{T}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ EŘÚ taková, že $\mathbb{T}\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Podle Věty 21 platí $\det\mathbb{T}\det\mathbb{A} = \det\mathbb{I} = 1$. Odtud je jasné, že $\det\mathbb{A} \neq 0$.
($\Leftarrow$) : $\mathbb{A}$ lze převést EŘÚ na matici $\widehat{\mathbb{A}}$ v horním stupňovitém tvaru. Existuje tedy $\mathbb{T}$ vzniklá z $\mathbb{I}$ EŘÚ taková, že $\widehat{\mathbb{A}} = \mathbb{T}\mathbb{A}$. Podle Věty 21 a předchozí poznámky platí $\det\widehat{\mathbb{A}} = \det\mathbb{T}\det\mathbb{A} \neq 0$. Čtvercová matice v horním stupňovitém tvaru s nenulovým determinantem má na diagonále samá nenulová čísla, a tedy má samé hlavní sloupce a hodnost rovnu n. Odtud už plyne, že hodnost $h(\mathbb{A}) = n$, tedy $\mathbb{A}$ je regulární. □

Věta 23 (Determinant součinu matic)**.** *Jsou-li $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$, pak*

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{A}\det\mathbb{B}.$$

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dva případy.

1. Je-li $\mathbb{A}$ singulární, pak z Věty 22 plyne $\det\mathbb{A} = 0$. Dále podle Věty 4 o hodnosti součinu matic máme
$$h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{A}) < n.$$
Proto $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je singulární. Na základě Věty 22 máme $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = 0 = \det\mathbb{A}\det\mathbb{B}$.
2. Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak $\mathbb{A}^{-1}$ je také regulární, a lze ji tedy převést EŘÚ na $\mathbb{I}$, tj. existuje matice $\mathbb{T}$ vzniklá EŘÚ z $\mathbb{I}$ taková, že $\mathbb{I} = \mathbb{T}\mathbb{A}^{-1}$. Odtud vidíme, že $\mathbb{A} = \mathbb{T}$ a podle Věty 21 platí $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{A}\det\mathbb{B}$.

□

Příklad 12. *Nechť*
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ověřte, že $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{A}\det\mathbb{B}$.

Řešení: *Jelikož* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, *dostáváme* $5 = \det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det\mathbb{A}\det\mathbb{B} = 1 \cdot 5$.

Věta 24 (Determinant inverzní matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A}$ *je regulární matice s prvky z tělesa* T*, pak*
$$\det\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbb{A}}.$$

Důkaz. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, dostáváme podle Věty 23 o determinantu součinu matic
$$\det\mathbb{A}\det\mathbb{A}^{-1} = \det\mathbb{I} = 1,$$
odkud již tvrzení plyne. □

Příklad 13. *Nechť*
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Pak $\det\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$

Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ *úplnou Gaussovou eliminací a ověřte, že* $\det\mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2}$.

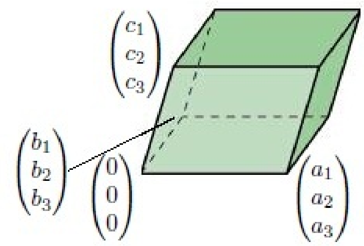
Domácí úkol 3. *Geometrický význam determinantu – lépe půjde ověřit, až budeme znát skalární součin. 1. a 2. úloha jsou dohromady za 1 bod. 3. úloha je za 3 body (bez použití skalárního a vektorového součinu).*

1. *Nechť je dán trojúhelník v* $\mathbb{R}^2$ *s vrcholy* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$*. Pak pro jeho obsah platí*
$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}\right|.$$

2. *Nechť je dán rovnoběžník v* $\mathbb{R}^2$ *s vrcholy* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$*. Pak pro jeho obsah platí*
$$S = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right|.$$

3. *Nechť je dán rovnoběžnostěn s vrcholy* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$*. Pak pro jeho objem platí*
$$V = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right|.$$

Definice 12. *Nechť* $\mathbb{A}$ *je čtvercová matice řádu* $n > 1$ *s prvky z tělesa* T*, označme* $\mathbb{A}^{(i,j)}$ *matici, která vznikla z* $\mathbb{A}$ *vyškrtnutím* i*-tého řádku a* j*-tého sloupce. Pak číslo*
$$D_{ij} := (-1)^{i+j}\det\mathbb{A}^{(i,j)}$$
se nazývá algebraický doplněk prvku $\mathbb{A}_{ij}$.



Obrázek 2: Rovnoběžnostěn.

Příklad 14. *Najděte algebraické doplňky všech prvků matice* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ .$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Věta 25 (Rozvoj determinantu podle i-tého řádku, resp. j-tého sloupce)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. *Pak platí pro každé* $i \in \widehat{n}$

$$\det\mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku)},$$

respektive pro každé $j \in \widehat{n}$

$$\det\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle j-tého sloupce)}.$$

K důkazu využijeme pomocné lemma.

Lemma 5. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. *Nechť má* $\mathbb{A}$ *v* i*-tém řádku samé nulové prvky kromě* $\mathbb{A}_{ik}$, *tj.* $\mathbb{A}_{i\ell} = 0$ *pro každé* $\ell \in \widehat{n}, \ell \neq k$. *Pak platí* $\det\mathbb{A} = \mathbb{A}_{ik} D_{ik}$.

Důkaz. Rozdělíme důkaz na dva případy.

1. Pro $i = k = n$ plyne z definice $\det\mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \dots \mathbb{A}_{n\pi(n)}$, že členy odpovídající permutacím π, pro které $\pi(n) \neq n$, jsou nulové. Navíc platí, že permutace $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n-1) & n \end{pmatrix}$ z S_n a permutace $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n-1) \end{pmatrix}$ z S_{n-1} mají stejné znaménko. Odtud dostáváme

$$\det\mathbb{A} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}\sigma \mathbb{A}_{1\sigma(1)} \mathbb{A}_{2\sigma(2)} \dots \mathbb{A}_{(n-1)\sigma(n-1)} \mathbb{A}_{nn} = \mathbb{A}_{nn} \det\mathbb{A}^{(n,n)} = \mathbb{A}_{nn} D_{nn}.$$

2. Pro $(i,k) \neq (n,n)$ provedeme postupně záměnu i. a $(i+1)$. řádku, poté $(i+1)$. a $(i+2)$. až po záměnu $(n-1)$. a n. řádku. Tak dopravíme i-tý řádek na poslední místo. Celkem tedy provedeme $n-i$ záměn. Podobným způsobem vytvoříme z k-tého sloupce poslední. Vyrobíme tak matici, která splňuje podmínku z 1. bodu důkazu. Podle pravidel o záměnách řádků a sloupců dostaneme

$$\det\mathbb{A} = (-1)^{n-i}(-1)^{n-k}\mathbb{A}_{ik}\det\mathbb{A}^{(i,k)} = (-1)^{i+k}\mathbb{A}_{ik}\det\mathbb{A}^{(i,k)} = \mathbb{A}_{ik}D_{ik}.$$

□

Důkaz Věty 25. Dokážeme tvrzení o rozvoji podle i-tého řádku. Tvrzení o rozvoji podle j-tého sloupce se dokáže analogicky. Označme ${}^i\mathbb{A}^j$ matici, která se shoduje s maticí $\mathbb{A}$, akorát v i-tém řádku má kromě prvku $\mathbb{A}_{ij}$ samé nuly. Pro takovou matici víme podle Lemmatu 5, že $\det{}^i\mathbb{A}^j = \mathbb{A}_{ij}D_{ij}$. Díky 6. bodu Věty 20 (verze pro řádky) platí $\det\mathbb{A} = \sum_{j=1}^n \det{}^i\mathbb{A}^j = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ij}D_{ij}$. □

Příklad 15. *Spočtěte determinant rozvojem podle řádků či sloupců.*

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Řešení: *Začneme rozvojem podle prvního řádku*

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

První dva determinanty jsou nulové, protože příslušné matice mají LZ sloupce. Dopočteme determinant rozvojem podle posledního sloupce.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6.$$

Věta 26 (Inverzní a adjungovaná matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{n,n},\ n > 1$, $\mathbb{A}$ *je regulární. Pak*

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbb{A}}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matici sestavené z algebraických doplňků se říká **adjungovaná** *nebo* **reciproká** *a značí se* $\mathbb{A}^{adj}$.

Důkaz. Označme $\mathbb{X} = \frac{1}{\det\mathbb{A}}\mathbb{A}^{adj}$. Ověříme-li, že $\mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, bude dokázáno, že $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}$.

Nechť $i, j \in \widehat{n}$. Pak

$$[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_{ik}\mathbb{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det\mathbb{A}} D_{ki}\mathbb{A}_{kj}.$$

- Pro $i = j$ aplikujeme Větu 25 a máme

$$[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ii} = \frac{1}{\det\mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\mathbb{A}_{ki} = \frac{\det\mathbb{A}}{\det\mathbb{A}} = 1.$$

- Pro $i \neq j$ uvažujme matici $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ náhradou i-tého sloupce j-tým. Determinant matice $\mathbb{B}$ je nulový, a počítáme-li $\det\mathbb{B}$ rozvojem podle i-tého sloupce, dostaneme $0 = \det\mathbb{B} = \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\mathbb{A}_{kj}$. Proto $[\mathbb{X}\mathbb{A}]_{ij} = 0$.

□

Poznámka 17. *Výhodou vzorce pro výpočet $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí $\mathbb{A}^{adj}$ oproti úplné Gaussově eliminaci je možnost vypočíst konkrétní prvek $[\mathbb{A}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\det\mathbb{A}} D_{ji}$, aniž bychom počítali celou $\mathbb{A}^{-1}$. Nevýhodou je pomalost, náročnost výpočtu.*

Příklad 16. *Jak spočteme* $\det\mathbb{A}^{adj}$*, známe-li* $\det\mathbb{A}$*?*
Řešení: *Jelikož $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbb{A}}\mathbb{A}^{adj}$, máme $\frac{1}{\det\mathbb{A}} = \det\mathbb{A}^{-1} = (\frac{1}{\det\mathbb{A}})^n \det\mathbb{A}^{adj}$. Číslem $\frac{1}{\det\mathbb{A}}$ je vynásobený každý řádek matice $\mathbb{A}^{adj}$, odtud n-tá mocnina. Na závěr dostáváme*

$$\det\mathbb{A}^{adj} = (\det\mathbb{A})^{n-1}.$$

Poznámka 18. *Vzorec pro zapamatování výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ pro matici $\mathbb{A}$ řádu 3 pomocí $\mathbb{A}^{adj}$ podle Cayleyho*

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\nabla} \begin{pmatrix} \partial_a\nabla & \partial_{a'}\nabla & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla & \partial_{b'}\nabla & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla & \partial_{c'}\nabla & \partial_{c''}\nabla \end{pmatrix},$$

kde ∇ značí $\det\mathbb{A}$*. Skutečně algebraický doplněk prvku a, tj. $b'c'' - b''c'$, získáme parciální derivací determinantu $\nabla = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$ podle a.*

Příklad 17. *Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pro* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: *Algebraické doplňky prvků $\mathbb{A}$ už jsme spočítali v Příkladu 14 a máme spočteno, že* $\det\mathbb{A} = -2$*. Odtud*

$$\mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 27 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$, $\mathbb{A}$ je regulární, $\vec{b} \in T^n$. Pak pro každé $j \in \widehat{n}$ je j-tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna*

$$x_j = \frac{\det\mathbb{B}^{(j)}}{\det\mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{B}^{(j)}$ je matice, která vznikne náhradou j-tého sloupce matice $\mathbb{A}$ vektorem $\vec{b}$.

Důkaz. Z posledního bodu Věty 9 víme, že řešení splňuje $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$. Využijeme vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí adjungované z Věty 26 a vypočítáme x_j. Připomeňme, že $[\mathbb{A}]_{j\bullet}$ značí j-tý řádek matice $\mathbb{A}$.

$$x_j = [\mathbb{A}^{-1}]_{j\bullet} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\det\mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} [\mathbb{A}^{adj}]_{jk} b_k = \frac{1}{\det\mathbb{A}} \sum_{k=1}^{n} b_k D_{kj} = \frac{\det\mathbb{B}^{(j)}}{\det\mathbb{A}},$$

kde v poslední rovnosti jsme využili rozvoje $\det\mathbb{B}^{(j)}$ podle j-tého sloupce. □

Poznámka 19. *Výhodou Cramerova pravidla oproti Gaussově eliminaci je možnost vypočíst konkrétní složku řešení, aniž bychom počítali ostatní složky. Nevýhodou je pomalost, náročnost výpočtu.*

Příklad 18. *Řešte pomocí Cramerova pravidla soustavu s maticí* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *a s vektorem pravé strany* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: *Už víme, že* $\det\mathbb{A} = -2$.

$$x_1 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

řešením soustavy je tedy $\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Domácí úkol 4 (1 bod)**.** *Dokažte, že Vandermondův determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i,j\in\hat{n},\ i<j} (\alpha_j - \alpha_i),$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. *Poté použijte Cramerovo pravidlo a Vandermondův determinant k určení vztahů, které musí splňovat parametry* $a, b, c \in \mathbb{C}$, *aby následující soustava LAR měla právě jedno řešení, a k nalezení tohoto řešení.*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^3 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^3 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^3 \end{array}.$$

Na závěr této kapitoly si ukážeme souvislost hodnosti a determinantu matice. V historii byla hodnost definována nejprve pomocí determinantů, až později vznikla „naše“ současná definice.

Definice 13. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. *Nechť* $i_1, i_2, \dots, i_k \in \hat{m}$ *a* $j_1, j_2, \dots, j_\ell \in \hat{n}$ *splňují* $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$ *a* $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_\ell \leq n$. *Pak matici* $\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_k \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_\ell \end{pmatrix}$, *která vznikla z* $\mathbb{A}$ *vyškrtnutím všech prvků, které nemají řádkový index z* $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ *a zároveň sloupcový index z* $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$, *nazveme* **submaticí** *matice* $\mathbb{A}$. *Je-li submatice čtvercová řádu k, pak její determinant nazveme* **subdeterminantem (minorem)** *řádu k matice* $\mathbb{A}$.

Příklad 19. *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. *Pak* $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 2, & 3 \\ 1, & 3, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Věta 28 (Hodnost a subdeterminant)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. *Pak* $h(\mathbb{A}) = k$, *právě když existuje nenulový subdeterminant matice* $\mathbb{A}$ *řádu* k *a každý subdeterminant vyššího řádu je nulový.*

Důkaz. Dokážeme dvě implikace.
$(\Rightarrow)$:

- Existence nenulového subdeterminantu řádu k: Jelikož $h(\mathbb{A}) = k$, existují vzájemně různé sloupcové indexy $j_1, j_2, \dots, j_k$ takové, že $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & m \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_k \end{pmatrix})$. Z Věty 7 víme, že $h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}1, 2, \dots, m\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}) = h(\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix}1, 2, \dots, m\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}\right)^T)$. Protože je jedno, zda nejprve škrtáme sloupce a pak transponujeme, nebo nejprve transponujeme a pak škrtáme řádky, platí $\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix}1, 2, \dots, m\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}\right)^T = \mathbb{A}^T\begin{pmatrix}j_1, j_2, \dots, j_k\\ 1, 2, \dots, m\end{pmatrix}$. Hodnost $\mathbb{A}^T\begin{pmatrix}j_1, j_2, \dots, j_k\\ 1, 2, \dots, m\end{pmatrix}$ je rovna k, existují tedy indexy $i_1, i_2, \dots, i_k \in \widehat{m}$ takové, že $k = h(\mathbb{A}^T\begin{pmatrix}j_1, j_2, \dots, j_k\\ i_1, i_2, \dots, i_k\end{pmatrix})$. Pomocí Věty 7 dostáváme $k = h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_k\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix})$, tedy submatice $\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_k\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}$ je regulární a podle Věty 22 je její determinant hledaným nenulovým subdeterminantem řádu k.

- Nulovost subdeterminantů vyšších řádů: Je-li $\ell > k$, pak pro libovolné řádkové indexy $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ a sloupcové indexy $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ platí následující série (ne)rovností

$$
\begin{aligned}
h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_\ell\\ j_1, j_2, \dots, j_\ell\end{pmatrix}) &\leq h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_\ell\\ 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}) && \text{(definice hodnosti)}\\
h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_\ell\\ 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}) &= h(\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_\ell\\ 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}\right)^T) && \text{(hodnost transponované matice)}\\
h(\left(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_\ell\\ 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}\right)^T) &= h(\mathbb{A}^T\begin{pmatrix}1, 2, \dots, n\\ i_1, i_2, \dots, i_\ell\end{pmatrix}) && \text{(škrtání řádků + transponování =}\\
& && \text{= transponování + škrtání sloupců)}\\
h(\mathbb{A}^T\begin{pmatrix}1, 2, \dots, n\\ i_1, i_2, \dots, i_\ell\end{pmatrix}) &\leq h(\mathbb{A}^T) && \text{(definice hodnosti)}\\
h(\mathbb{A}^T) &= h(\mathbb{A}) = k.
\end{aligned}
$$

  Tedy libovolná submatice řádu ℓ má hodnost menší nebo rovnu $k < \ell$, není tedy regulární a její determinant je nulový.

$(\Leftarrow)$: Nechť $\det(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_k\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}) \neq 0$, pak $k = h(\mathbb{A}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \dots, i_k\\ j_1, j_2, \dots, j_k\end{pmatrix}) \leq h(\mathbb{A})$ (nerovnost vysvětlena v předchozím bodu). Zároveň $h(\mathbb{A}) < k+1$. Kdyby totiž platilo $h(\mathbb{A}) \geq k+1$, pak by podle již dokázané implikace existoval nenulový subdeterminant řádu většího než k, což je spor s předpokladem. $\square$

3.3 Determinant operátoru

Definice 14. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a* $\dim V < +\infty$. *Nechť $\mathcal{X}$ je báze V a $A \in \mathcal{L}(V)$. Pak* **determinant operátoru** *A značíme* $\det A$ *a klademe roven* $\det A = \det({}^{\mathcal{X}}A)$.

Poznámka 20. *Je třeba ověřit korektnost definice, tedy nezávislost na volbě báze. Je-li $\mathcal{Y}$ také báze V, pak ${}^{\mathcal{X}}A = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})$. Jelikož matice ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ a ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$ jsou k sobě inverzní, dostáváme podle Věty 24*

$$\det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = 1.$$

Odtud s použitím Věty 23 plyne

$$\det({}^{\mathcal{X}}A) = \det\left(({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})({}^{\mathcal{Y}}A)({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})\right) = \det({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})\det({}^{\mathcal{Y}}A)\det({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}) = \det({}^{\mathcal{Y}}A).$$

Sami přeformulejte tvrzení o determinantech matic na analogická tvrzení o determinantech operátorů a dokažte je.

4 Spektrální teorie matic

V celé kapitole uvažujeme čtvercové matice s komplexními prvky.

4.1 Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Definice 15. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme* **vlastním číslem** *$\mathbb{A}$, pokud existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme* **vlastním vektorem** *$\mathbb{A}$ příslušným λ. Množinu vlastních čísel nazveme* **spektrem** *$\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$.*

Poznámka 21. *Matice s reálnými prvky nemusí mít reálná vlastní čísla. Například $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní číslo i s vlastním vektorem $\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, protože*

$$\mathbb{A}\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = i\left(\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Věta 29 (LK vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Označme $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru. Pak $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$. Navíc $\{\mathbb{A}\vec{x} \mid \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$.*

Důkaz. $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0}\}$, tj. P_λ je množinou řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$, tedy podle Frobeniovy věty je $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$. Jelikož $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \in P_\lambda$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda$, platí i druhé tvrzení. □

Definice 16. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.* **Geometrickou násobností** *λ nazveme $\nu_g(\lambda) = \dim P_\lambda$.*
Slovy: „$\nu_g(\lambda)$ je počet LN vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ."

Hledat vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ znamená řešit homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}$. Ještě je třeba vědět, jak efektivně hledat vlastní čísla. K tomu potřebujeme definovat charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.

Definice 17. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) = det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme* **charakteristický polynom** *$\mathbb{A}$.*

Věta 30 (Vlastní čísla a charakteristický polynom)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, právě když $p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$.*
Slovy: „λ je vlastním číslem $\mathbb{A}$, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu."

Důkaz. $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$ homogenní soustava s maticí $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ má netriviální řešení $\Leftrightarrow$ matice $(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$ je singulární $\Leftrightarrow \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Leftrightarrow p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$. □

Příklad 20. *Najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory $\mathbb{A}$, kde*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

- *Vlastní čísla:*
$$p_\mathbb{A}(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = -t(1-t)^2, \textit{ proto } \sigma(\mathbb{A}) = \{0, 1\}.$$

- *Vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné 0 řeší homogenní soustavu s maticí $\mathbb{A} - 0\mathbb{I} = \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

  Z Frobeniovy věty plyne, že dimenze množiny řešení $\nu_g(0) = 1$ a množina všech řešení je

$P_0 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. *Vlastními vektory* $\mathbb{A}$ *příslušnými k* 0 *jsou všechny nenulové násobky vektoru* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Vlastní vektory* $\mathbb{A}$ *příslušné* 1 *řeší homogenní soustavu s maticí* $\mathbb{A}-1\mathbb{I} = \mathbb{A}-\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Z Frobeniovy věty plyne, že dimenze množiny řešení* $\nu_g(1) = 2$ *a množina všech řešení je* $P_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. *Vlastními vektory* $\mathbb{A}$ *příslušnými k* 1 *jsou všechny netriviální LK vektorů* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *a* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Věta 31 (Vlastnosti charakteristického polynomu)**.** *Nechť* $p_{\mathbb{A}}$ *je charakteristický polynom matice* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Potom*

1. $p_{\mathbb{A}}$ *je polynom stupně* n,
2. *koeficient u členu nejvyššího stupně* t^n *v* $p_{\mathbb{A}}(t)$ *je* $(-1)^n$,
3. *konstantní člen polynomu* $p_{\mathbb{A}}$ *je roven det* $\mathbb{A}$.

Důkaz. Podle definice obsahuje každý člen determinantu $p_{\mathbb{A}}(t)$ součin n prvků matice $\mathbb{A} - t\mathbb{I}$ opatřený znaménkem odpovídající permutace. Každý člen je tedy sám o sobě polynomem v bodě t. Členy determinantu se pak sčítají, tedy výsledný determinant $p_{\mathbb{A}}(t)$ je opět polynom v bodě t. Nejvyšší mocnina t se objevuje ve členu determinantu $p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ odpovídajícím identické permutaci, tedy ve členu $(\mathbb{A}_{11} - t)(\mathbb{A}_{22} - t)\dots(\mathbb{A}_{nn} - t)$, což je t^n, a objevuje se s koeficientem $(-1)^n$.

Označme $p_{\mathbb{A}}(t) = (-1)^n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$. Pak $p_{\mathbb{A}}(0) = b_0$. Zároveň podle definice charakteristického polynomu máme $p_{\mathbb{A}}(0) = \det(\mathbb{A} - 0\mathbb{I}) = \det \mathbb{A}$. Tedy koeficient u konstantního členu $b_0 = \det \mathbb{A}$. □

Definice 18. *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Nechť* $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. **Algebraickou násobností** $\nu_a(\lambda)$ *vlastního čísla* λ *nazveme násobnost* λ *jakožto kořene charakteristického polynomu* $p_{\mathbb{A}}$.

Věta 32 (Vlastní čísla a det $\mathbb{A}$)**.** *Nechť* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Pak*

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \dots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Slovy: „det $\mathbb{A}$ *je součinem vlastních čísel* $\mathbb{A}$ *(braných včetně násobností).“*

Důkaz. Známe-li kořeny $p_{\mathbb{A}}$ (což jsou právě vlastní čísla) a koeficient u nejvyšší mocniny t^n, pak získáme rozklad na kořenové činitele $p_{\mathbb{A}}(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{\nu_a(\lambda_1)}(t-\lambda_2)^{\nu_a(\lambda_2)} \dots (t-\lambda_k)^{\nu_a(\lambda_k)}$ a z něj vidíme, že $p_{\mathbb{A}}(0) = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \dots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}$. Z 3. bodu Věty 31 víme, že $p_{\mathbb{A}}(0) = \det \mathbb{A}$. Proto $\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \dots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}$. □

Důsledek 10 (Vlastní čísla a regularita matice)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. *Matice* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

Důkaz. Jelikož je podle Věty 32 det $\mathbb{A}$ roven součinu vlastních čísel a jelikož $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$, dostáváme tvrzení důsledku. □

Věta 33 (Vlastní čísla trojúhelníkové matice)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je horní (dolní) trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla jsou rovna diagonálním prvkům matice.*

Důkaz. Pro horní (dolní) trojúhelníkovou matici víme z Věty 19 o determinantu trojúhelníkové matice, že $p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = (\mathbb{A}_{11} - t)(\mathbb{A}_{22} - t) \dots (\mathbb{A}_{nn} - t)$. Odtud již tvrzení plyne užitím Věty 30. □

Věta 34 (Vztah algebraické a geometrické násobnosti)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí*

$$\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda).$$

Důkaz. Označme $k = \nu_g(\lambda)$. Podle definice geometrické násobnosti umíme najít k LN vlastních vektorů příslušných λ. Označme je $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$. Doplňme soubor $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ na bázi $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ prostoru $\mathbb{C}^n$. Vytvořme matici $\mathbb{X}$ mající sloupce $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$. Taková matice je jistě regulární, neboť má LN sloupce. Proto existuje $\mathbb{X}^{-1}$. Podle Věty 23 o determinantu součinu matic a Věty 24 o determinantu inverzní matice platí

$$p_{\mathbb{A}}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right).$$

Jelikož $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda\vec{x}_i$ pro každé $i \in \hat{k}$, snadno si rozmyslíme, že

$$\det\left(\mathbb{X}^{-1}(\mathbb{A} - t\mathbb{I})\mathbb{X}\right) = \det\left((\lambda - t)\vec{e}_1, \dots, (\lambda - t)\vec{e}_k,\ \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}_{k+1} - t\vec{e}_{k+1}, \dots, \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\vec{x}_n - t\vec{e}_n\right) = (\lambda - t)^k q(t),$$

kde $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je standardní báze $\mathbb{C}^n$. Poslední rovnost jsme získali opakovaným rozvojem determinantu podle prvního řádku a $q(t)$ je polynom stupně $n - k$, který je roven determinantu matice, jež po rozvoji zbude. Z rovnosti $p_{\mathbb{A}}(t) = (\lambda - t)^k q(t)$ je jasné, že $\nu_a(\lambda) \geq k = \nu_g(\lambda)$. □

Poznámka 22. *Je-li λ vlastní číslo $\mathbb{A}$, pak zřejmě $\nu_a(\lambda) \geq 1$ a $\nu_g(\lambda) \geq 1$. Podle Věty 34 dostáváme, že jakmile $\nu_a(\lambda) = 1$, pak také $\nu_g(\lambda) = 1$.*

Věta 35 (LN vlastních vektorů příslušných různým vlastním číslům)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory $\mathbb{A}$. Pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ je LN soubor.*

Důkaz. Dokážeme tvrzení sporem. Předpokládáme, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ je LZ, pak podle alternativní definice LZ je buď $\vec{x}_1 = \vec{0}$ (to ale nenastává, protože $\vec{x}_1$ je vlastní vektor), nebo existuje $j \in \hat{k}$, $j \geq 2$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ tak, že $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \vec{x}_i$. Bereme nejmenší takové j, pak je zřejmé, že $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{j-1})$ je LN soubor. Pak $\lambda_j \vec{x}_j = \mathbb{A}\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \mathbb{A}\vec{x}_i = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i$. Zároveň $\lambda_j \vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \lambda_j \vec{x}_i$. Odtud dostáváme

$$\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j) \vec{x}_i = \vec{0}.$$

Jelikož $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$, plyne z LN souboru $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{j-1})$, že $\alpha_i = 0$ pro každé $i \in \widehat{j-1}$. Odtud plyne, že $\vec{x}_j = \vec{0}$, což je spor s předpokladem, že $\vec{x}_j$ je vlastní, tedy nenulový vektor. □

Věta 36 (Báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. V $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$ právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Dokažme tvrzení sporem. Nechť existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů $\mathbb{A}$ a zároveň existuje $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ tak, že $\nu_a(\lambda) > \nu_g(\lambda)$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla $\mathbb{A}$. Podle definice je součet algebraických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ roven stupni charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_a(\lambda_i) = n.$$

Podle předpokladu platí $\sum_{i=1}^k \nu_a(\lambda_i) > \sum_{i=1}^k \nu_g(\lambda_i)$. Zároveň počet vlastních vektorů k λ_i v bázi $\mathcal{X}$ je nejvýše $\nu_g(\lambda_i)$. Odtud plyne, že počet vektorů v bázi $\mathcal{X}$ je nejvýše $\sum_{i=1}^k \nu_g(\lambda_i) < n$, což je spor s předpokladem, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^n$.
$(\Leftarrow)$: Nechť má matice $\mathbb{A}$ k různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ke každému vlastnímu číslu λ_i lze najít $\nu_g(\lambda_i)$ LN vlastních vektorů $\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)}$. Ukažme, že soubor vytvořený z vektorů $\left(\vec{x}_1^{(1)}, \vec{x}_2^{(1)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_1)}^{(1)}, \vec{x}_1^{(2)}, \vec{x}_2^{(2)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_2)}^{(2)}, \dots, \vec{x}_1^{(k)}, \vec{x}_2^{(k)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_k)}^{(k)}\right)$ tvoří bázi $\mathbb{C}^n$. Jejich počet je roven $\sum_{i=1}^k \nu_g(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \nu_a(\lambda_i) = n$, kde první rovnost plyne z rovností $\nu_g(\lambda) = \nu_a(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a druhá z faktu, že součet algebraických násobností vlastních čísel je roven stupni charakteristického polynomu, tedy n. Stačí proto ukázat, že soubor je LN. Uvažujme LK souboru rovnou nulovému vektoru, tj.

$$\sum_{j_1=1}^{\nu_g(\lambda_1)} \alpha_{j_1}^{(1)} \vec{x}_{j_1}^{(1)} + \sum_{j_2=1}^{\nu_g(\lambda_2)} \alpha_{j_2}^{(2)} \vec{x}_{j_2}^{(2)} + \cdots + \sum_{j_k=1}^{\nu_g(\lambda_k)} \alpha_{j_k}^{(k)} \vec{x}_{j_k}^{(k)} = \vec{0}.$$

Každá ze sum je buď rovna nulovému vektoru, nebo jde o vlastní vektor $\mathbb{A}$ (jelikož se jedná o LK vlastních vektorů příslušných danému vlastnímu číslu). Jelikož jsou ovšem vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům LN, nutně nastává první možnost, tedy sumy jsou rovny nulovým vektorům. Nulovost koeficientů $\alpha_{j_i}^{(i)}$ pro každé $i \in \hat{k}$ a každé $j_i \in \{1, \dots, \nu_g(\lambda_i)\}$ pak plyne z LN souboru $(\vec{x}_1^{(i)}, \vec{x}_2^{(i)}, \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda_i)}^{(i)})$ pro každé $i \in \hat{k}$. Tím je LN celého souboru dokázána. $\square$

4.2 Diagonalizovatelnost matic

Definice 19. *Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.*

Poznámka 23. *Podobnost je ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n, tj.*

- *$\mathbb{A}$ je podobná sama sobě,*
- *je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{A}$,*
- *je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}$ podobná $\mathbb{C}$, pak $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{C}$.*

Důkaz ponechán čtenáři, plyne snadno z definice podobnosti.

Věta 37 (Vlastnosti podobných matic)**.** *Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$.*

1. *Pak $p_\mathbb{A} = p_\mathbb{B}$, tedy i $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^\mathbb{A}(\lambda) = \nu_a^\mathbb{B}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$, kde $\nu_a^\mathbb{A}(\lambda)$ značí algebraickou násobnost λ pro matici $\mathbb{A}$ a podobně pro $\mathbb{B}$.*
2. *Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$, pak $\nu_g^\mathbb{A}(\lambda) = \nu_g^\mathbb{B}(\lambda)$, kde $\nu_g^\mathbb{A}(\lambda)$ značí geometrickou násobnost λ pro matici $\mathbb{A}$ a podobně pro $\mathbb{B}$.*

Důkaz. Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$, pak

$$p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1} - t\mathbb{I}) = \det(\mathbb{X}(\mathbb{B} - t\mathbb{I})\mathbb{X}^{-1}) = \det(\mathbb{B} - t\mathbb{I}) = p_\mathbb{B}(t).$$

Tím je dokázána rovnost charakteristických polynomů, tedy i spekter a algebraických násobností.

Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots, \vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou LN vlastní vektory $\mathbb{A}$ příslušné λ. Pak $\lambda\vec{x}_i = \mathbb{A}\vec{x}_i = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$, odtud $\lambda\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i = \mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_i$, proto $\mathbb{X}^{-1}\vec{x}_1, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_2, \dots, \mathbb{X}^{-1}\vec{x}_{\nu_g(\lambda)}$ jsou vlastní vektory $\mathbb{B}$ příslušné λ. Díky regularitě $\mathbb{X}$, tedy i $\mathbb{X}^{-1}$, je získaný soubor vlastních vektorů $\mathbb{B}$ příslušných λ LN. Proto $\nu_g^\mathbb{B}(\lambda) \geq \nu_g^\mathbb{A}(\lambda)$. Jelikož $\mathbb{B}$ je zároveň podobná $\mathbb{A}$, dostaneme také $\nu_g^\mathbb{A}(\lambda) \geq \nu_g^\mathbb{B}(\lambda)$. Tím je dokázána rovnost geometrických násobností. $\square$

Poznámka 24. *Implikaci ve Větě 37 nelze obrátit. Rozmyslete si sami, že matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mají stejné charakteristické polynomy i stejné geometrické násobnosti vlastních čísel, přesto si nejsou podobné.

Nabízí se otázka, do jaké nejjednodušší podoby lze matici podobnostní transformací převést, tj. jaké nejjednodušší matici je daná matice podobná. Speciálně se ptáme, zda je každá čtvercová matice podobná diagonální matici.

Definice 20. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ nazveme* **diagonalizovatelnou**, *pokud je podobná diagonální matici, tj. existuje $\mathbb{D}$ diagonální a $\mathbb{X}$ regulární řádu n tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.*

Poznámka 25. *Na diagonále $\mathbb{D}$ z předchozí definice jsou vlastní čísla matice $\mathbb{A}$, a to tolikrát, kolik je jejich algebraická násobnost. Diagonální matice má totiž podle Věty 33 diagonální prvky rovné vlastním číslům a podle Věty 37 mají $\mathbb{A}$ a $\mathbb{D}$ stejná vlastní čísla a se shodnými algebraickými násobnostmi.*

Věta 38 (Diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
$(\Rightarrow)$: Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Ukážeme, že sloupce matice $\mathbb{X}$ tvoří hledanou bázi $\mathbb{C}^n$. Označme $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ sloupce $\mathbb{X}$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ diagonální prvky $\mathbb{D}$. Z regularity $\mathbb{X}$ je jasné, že soubor $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN. Jelikož $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{D}$, máme $\mathbb{A}\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i$ pro každé $i \in \hat{n}$. Proto $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor z vlastních vektorů. Tím je dokázáno, že $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je hledaná báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$.
$(\Leftarrow)$: Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů příslušných vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, označme $\mathbb{X}$ matici se sloupci $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$. Matice $\mathbb{X}$ je tedy regulární. Snadno ověříte, že

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ 0 & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ odkud plyne } \mathbb{A} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ 0 & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{X}^{-1},$$

tedy $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. $\square$

Při praktickém ověřování, zda je matice diagonalizovatelná, se nám lépe bude hodit následující tvrzení, které je důsledkem Vět 36 a 38.

Věta 39 (Diagonalizovatelnost a násobnosti)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, právě když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Poznámka 26. *Z důkazů Vět 36 a 38 víme, jak najdeme regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Je to možné, pokud jsou algebraické a geometrické násobnosti všech vlastních čísel shodné. V takovém případě umíme najít tolik LN vlastních vektorů ke každému vlastnímu číslu, kolik je jeho geometrická (a tedy i algebraická) násobnost. Z těchto vektorů sestavíme matici $\mathbb{X}$ a matice $\mathbb{D}$ má pak na diagonále vlastní čísla příslušná nalezeným vlastním vektorům v pořadí daném pořadím sloupců matice $\mathbb{X}$.*

Příklad 21. *Nechť* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Sestavte matici $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.*

Řešení: *V Příkladu 20 jsme našli vlastní vektory:*

$$\textit{vlastní vektor} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ příslušný } 0 \textit{ a LN vlastní vektory } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ příslušné } 1.$$

Sestavíme-li matici $\mathbb{X}$ z vlastních vektorů a matici $\mathbb{D}$ z vlastních čísel v odpovídajícím pořadí, tj. např.

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pak podle předchozí poznámky platí $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka 27. *Zatímco podobnostní transformace zachovávají vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic, ekvivalentní řádkové úpravy mohou vlastní čísla matice měnit a mohou měnit i diagonalizovatelnost. Například následující matice $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ záměnou řádků a platí $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ má různá vlastní čísla 0 a 1, a je tedy diagonalizovatelná, zatímco $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ má pouze vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 2 > 1 = \nu_g(0)$, proto není diagonalizovatelná.*

Poznámka 28. *Viděli jsme, že ne každou matici lze diagonalizovat. Bez důkazu uveďme, že každá matice je podobná matici $\mathbb{J}$ v* **Jordanově kanonickém tvaru***, kde $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$ je v blokově diagonálním tvaru (na diagonále jsou Jordanovy bloky J_i a mimo ně jsou samé nuly). Jordanův blok má tvar*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar je pro každou matici jediný až na pořadí bloků, počet Jordanových bloků odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven $\nu_g(\lambda)$ a součet řádů bloků odpovídajících λ je roven $\nu_a(\lambda)$.

Domácí úkol 5 (Jordanův kanonický tvar za 1 až 2 body)**.** *Najděte regulární matice $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{J}\mathbb{X}^{-1}$ a $\mathbb{B} = \mathbb{Y}\widehat{\mathbb{J}}\mathbb{Y}^{-1}$, kde $\mathbb{J}$ a $\widehat{\mathbb{J}}$ jsou v Jordanově kanonickém tvaru. Jsou si $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ podobné? Vysvětlete.*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Věta 40 (Hamiltonova-Caleyho věta)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\mathbb{A}$ je kořenem svého charakteristického polynomu, tj. je-li $p_{\mathbb{A}}(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, pak*

$$p_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}) = b_n \mathbb{A}^n + b_{n-1} \mathbb{A}^{n-1} + \dots + b_1 \mathbb{A} + b_0 \mathbb{I} = \mathbb{O}.$$

Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení evidentně platí. Uvažujme $n > 1$. Pro nekonečně mnoho $t \in \mathbb{C}$ je $\mathbb{A} - t\mathbb{I}$ regulární matice (pouze pro t rovná vlastním číslům je singulární). Pro taková t platí podle Věty 26

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})} (\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj}.$$

Odtud dostaneme

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I})(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj} = p_{\mathbb{A}}(t)\mathbb{I}.$$

Podle definice adjungované matice jsou prvky $(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj}$ polynomy stupně maximálně $n - 1$. Můžeme tedy psát

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j \mathbb{C}_j,$$

kde $\mathbb{C}_j$ je matice řádu n sestavená z koeficientů vyskytujících se u t^j v odpovídajících prvcích matice $(\mathbb{A} - t\mathbb{I})^{adj}$. Máme tedy maticovou rovnost

$$(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) \sum_{j=0}^{n-1} t^j \mathbb{C}_j = b_0\mathbb{I} + b_1 t\mathbb{I} + b_2 t^2 \mathbb{I} + \cdots + b_{n-1} t^{n-1} \mathbb{I} + b_n t^n \mathbb{I}.$$

Z rovnosti prvků matic, což jsou polynomy, plyne, že se musí rovnat matice u jednotlivých mocnin proměnné t. Dostáváme

$$\begin{array}{lrcl}
t^0: & \mathbb{A}\mathbb{C}_0 & = & b_0\mathbb{I}, \\
t^1: & \mathbb{A}\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_0 & = & b_1\mathbb{I}, \\
t^2: & \mathbb{A}\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1 & = & b_2\mathbb{I}, \\
 & \vdots & & \vdots \\
t^{n-1}: & \mathbb{A}\mathbb{C}_{n-1} - \mathbb{C}_{n-2} & = & b_{n-1}\mathbb{I}, \\
t^n: & -\mathbb{C}_{n-1} & = & b_n\mathbb{I}.
\end{array}$$

Pokud vynásobíme obě strany druhé rovnice maticí $\mathbb{A}$, třetí rovnice maticí $\mathbb{A}^2$ a analogicky pro další rovnice (končíme tedy vynásobením obou stran $(n+1)$. rovnice maticí $\mathbb{A}^n$) a následně všechny rovnice sečteme, dostaneme $\mathbb{O} = p_{\mathbb{A}}(\mathbb{A})$. □

Příklad 22. *V Příkladu 20 jsme našli charakteristický polynom $p_{\mathbb{A}}(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že $-\mathbb{A}^3 + 2\mathbb{A}^2 - \mathbb{A} = \mathbb{O}$.

4.3 Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

Úlohu hledat vlastní čísla a vlastní vektory operátorů převedeme na řešení stejné úlohy pro matice. Ovšem musíme mít pořád na paměti, že na rozdíl od matic, kdy pracujeme vždy nad tělesem komplexních čísel, je třeba u operátorů hlídat, nad kterým tělesem jsou definovány.

Definice 21. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Číslo $\underline{\lambda \in T}$ nazveme* **vlastním číslem** *operátoru A, pokud existuje $\vec{x} \in V$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme* **vlastním vektorem** *A příslušným λ. Množinu vlastních čísel nazveme* **spektrem** *A a značíme $\sigma(A)$.*

Věta 41 (LK vlastních vektorů operátoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$. Označme $P_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů A příslušných λ s přidáním nulového vektoru. Pak $P_\lambda \subset\subset V$. Navíc $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$.*

Důkaz. $P_\lambda = \{\vec{x} \in V \mid (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}\}$, tj. $P_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, tedy $P_\lambda \subset\subset V$. Jelikož $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \in P_\lambda$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda$, platí i druhé tvrzení. □

Příklad 23. *Nechť $S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ je operátor integrování. Vyšetřete jeho vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory.*
Řešení: *Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in \mathcal{P}$ jsou vlastní číslo a vlastní vektor S, pak $Sx = \lambda x$. Nechť $x(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Odtud máme pro každé $t \in \mathbb{C}$*

$$Sx(t) = a_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n}t^n + \frac{a_n}{n+1}t^{n+1} = \lambda(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n).$$

Pro $\lambda = 0$ i $\lambda \neq 0$ z rovnosti polynomů – tedy rovnosti koeficientů u jednotlivých mocnin t – dostáváme $0 = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_0$. Tedy x je nulový polynom.
Závěr: *Žádné komplexní číslo není vlastní číslo S a žádné vlastní vektory operátoru S neexistují.*

Věta 42 (LN vlastních vektorů operátoru příslušných různým vlastním číslům)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla, nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory A. Pak $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ je LN soubor.*

Důkaz. Analogický důkazu pro matice, proto ponechán čtenáři. □

Ve zbytku kapitoly o spektrální teorii operátorů se omezíme na vektorové prostory konečné dimenze. V nich budeme mít pro vyšetřování spektrálních vlastností operátorů stejný aparát jako u matic.

Definice 22. *Nechť V_n je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$.* **Geometrickou násobností** *λ nazveme $\nu_g(\lambda) = \dim P_\lambda$.*
Slovy: „$\nu_g(\lambda)$ je počet LN vlastních vektorů A příslušných λ.“

Definice 23. *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Zobrazení $p_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in T$ jako $p_A(t) = det(A - tI)$ a dodefinované pro každé $t \in \mathbb{C}$ tak, aby vznikl polynom, nazýváme* **charakteristický polynom** *operátoru A.*

Poznámka 29. *Rozmyslete si sami, že koeficienty polynomu p_A jsou jednoznačně určeny jeho hodnotami v bodech $t \in T$ (každé těleso má totiž nekonečně mnoho prvků). Získáme tak koeficienty $b_0, b_1, \ldots, b_n$ takové, že $p_A(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ pro každé $t \in T$. Dodefinujeme pak $p_A(t)$ jako $b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ i pro každé $t \in \mathbb{C} \setminus T$.*

Věta 43 (Vlastní čísla operátoru a charakteristický polynom)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\lambda \in \sigma(A)$, právě když $p_A(\lambda) = 0$ a $\underline{\lambda \in T}$.*
Slovy: „λ je vlastním číslem A, právě když λ je kořenem charakteristického polynomu a patří do tělesa.“

Důkaz. Nechť $\lambda \in T$. Pak platí následující ekvivalence: $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in V_n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in V_n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tak, že $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I)$ obsahuje nenulový vektor $\Leftrightarrow$ operátor $(A - \lambda I)$ není regulární $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0$. □

Příklad 24. *Nechť $A \in \mathcal{L}(T^2)$ a ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte spektrum A, je-li*

1. *$T = \mathbb{C}$,*
2. *$T = \mathbb{R}$ (tedy A je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček).*

Řešení:

1. *$p_A(t) = t^2 + 1$, tedy $\sigma(A) = \{-i, i\}$,*
2. *$p_A(t) = t^2 + 1$, tedy $\sigma(A) = \{-i, i\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$.*

Definice 24. *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$.* **Algebraickou násobností** *$\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu p_A.*

Poznámka 30. *Podívejme se na vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic a operátorů. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Dále nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}}A$.*

1. *Pro každé $t \in \mathbb{C}$*
$$p_A(t) = p_{\mathbb{A}}(t).$$

   Důkaz. Z definice determinantu operátoru plyne, že pro každé $t \in T$ platí
$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det({}^{\mathcal{X}}(A - tI)) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I}) = p_{\mathbb{A}}(t).$$

   Rovnají-li se dva polynomy v nekonečně mnoha bodech, rovnají se na $\mathbb{C}$. □

2. Z Věty 43 a z předchozího bodu plyne

$$\sigma(A) = \sigma(\mathbb{A}) \cap T.$$

3. Pro $\lambda \in T$ a $\vec{x} \in V_n$ platí

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \lambda(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

4. Z předchozích bodů dostaneme pro každé $\lambda \in \sigma(A)$

$$\nu_a^A(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) \text{ a } \nu_g^A(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda),$$

kde symboly A a $\mathbb{A}$ značí, zda jde o násobnost vlastního čísla pro operátor, či matici.

Pomocí předchozích vztahů přeformulujte tvrzení ze spektrální teorie matic na analogická tvrzení pro operátory a dokažte je.

4.4 Diagonalizovatelnost operátorů

Definice 25. *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A nazveme* **diagonalizovatelný***, pokud existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n taková, že ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice.*

Věta 44 (Diagonalizovatelnost operátoru a báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Nechť $\mathcal{Y}$ je báze V_n. Pak ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice, právě když $\mathcal{Y}$ je báze V_n z vlastních vektorů A.*

Důkaz. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$. Tvrzení pak plyne ze vztahu

$${}^{\mathcal{Y}}\!A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{y}_i = \lambda_i \vec{y}_i \quad \text{pro každé } i \in \hat{n}.$$

□

Věta 45 (Diagonalizovatelnost operátoru a násobnosti)**.** *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A je diagonalizovatelný, právě když*

1. *$\underline{p_A^{-1}(0) \subset T}$ (kořeny charakteristického polynomu jsou z tělesa T),*
2. *$\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.*

Důkaz. Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : A je diagonalizovatelný, tedy existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru V_n taková, že ${}^{\mathcal{Y}}\!A = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D} \in T^{n,n}$ je diagonální. Matice $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{Y}} A$ je tedy diagonalizovatelná a její vlastní čísla jsou z tělesa. Podle 1. bodu Poznámky 30 dostáváme, že $p_A^{-1}(0) \subset T$. Podle Věty 39 platí $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A}) = \sigma(A)$, podle 4. bodu Poznámky 30 platí tedy také $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.
($\Leftarrow$) : Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze V_n. Označme $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{X}} A$. Podle 1. a 2. bodu Poznámky 30 platí $\sigma(\mathbb{A}) \subset T$ a podle 4. bodu platí $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, tedy $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. Existuje tedy $\mathbb{X}$ regulární (lze ji volit z $T^{n,n}$) a $\mathbb{D} \in T^{n,n}$ diagonální (na diagonále jsou vlastní čísla operátoru) takové, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Položme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$, kde $\mathbb{X} = {}^{\mathcal{Y}} I^{\mathcal{X}}$. Pak $\mathbb{D} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = ({}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}})({}^{\mathcal{X}}\!A)({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}) = {}^{\mathcal{Y}} A$. Tedy $\mathcal{Y}$ je báze V_n splňující ${}^{\mathcal{Y}}\!A = \mathbb{D}$, což znamená, že A je diagonalizovatelný. □

Příklad 25. *Nechť* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *a* $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ *je báze* $\mathbb{R}^3$ *a* ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Najděte $\mathcal{Y}$ *tak, aby* ${}^{\mathcal{Y}}A$ *byla diagonální matice. Jak vypadá* ${}^{\mathcal{Y}}A$*?*
Řešení: *Označme* $\mathbb{A} =^{\mathcal{X}} A$.

$$p_A(t) = p_{\mathbb{A}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = -t(t-2)(t-3).$$

Dostáváme $\sigma(A) = \{0, 2, 3\}$.
Vlastní vektor $\mathbb{A}$ *příslušný* 0 *řeší homogenní soustavu s maticí*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Vlastní vektor $\mathbb{A}$ *příslušný* 2 *řeší homogenní soustavu s maticí*

$$\mathbb{A} - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Vlastní vektor $\mathbb{A}$ *příslušný* 3 *řeší homogenní soustavu s maticí*

$$\mathbb{A} - 3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektor je např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Hledanou bázi $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ *získáme ze vztahů*

$$(\vec{y}_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (\vec{y}_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (\vec{y}_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Závěr*:* $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ *a* ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Hermitovské a kvadratické formy

V celé kapitole si pod tělesem T představujte pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$ (všechna tvrzení by platila i pro tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování – bystrý čtenář si rozmyslí, proč je potřeba právě uzavřenost na komplexní sdružování).

Definice 26. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $h : V \times V \to T$ nazveme* **hermitovskou formou**, *pokud platí:*

1. **hermitovskost**: *pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}$,*
2. **linearita v 1. argumentu**: *pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí $h(\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z})$.*

Diagonálou *hermitovské formy h nazýváme zobrazení $Q : V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x})$.*

Poznámka 31. *Speciálně pro $T = \mathbb{R}$ můžeme u první vlastnosti hermitovské formy vynechat komplexní sdružování, tedy požadujeme, aby pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ platilo $h(\vec{x}, \vec{y}) = h(\vec{y}, \vec{x})$ (vlastnosti pak říkáme* **symetrie***).*

Věta 46 (Vlastnosti hermitovské formy a diagonály)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V a Q její diagonála. Pro každé $\alpha \in T$ a $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ platí*

1. **antilinearita ve 2. argumentu**: $h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z})$,
2. $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$,
3. $Q(\alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x})$,
4. $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2Re\,(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y})$,
5. **rovnoběžníková rovnost**:
$$Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2\left(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y})\right),$$
6. **polarizační identity**:
$$\begin{aligned} \textit{pro } T = \mathbb{R} \quad h(\vec{x}, \vec{y}) &= \tfrac{1}{4}\left(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\right), \\ \textit{pro } T = \mathbb{C} \quad h(\vec{x}, \vec{y}) &= \tfrac{1}{4}\left(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})\right) + \tfrac{i}{4}\left(Q(\vec{x} + i\vec{y}) - Q(\vec{x} - i\vec{y})\right). \end{aligned}$$

Důkaz. 1. S využitím definice hermitovské formy a z vlastností komplexního sdružování dostáváme
$$h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) = \overline{h(\alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x})} = \overline{\alpha h(\vec{y}, \vec{x}) + h(\vec{z}, \vec{x})} = \overline{\alpha}\ \overline{h(\vec{y}, \vec{x})} + \overline{h(\vec{z}, \vec{x})} = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z}).$$

2. Vlastnost plyne z hermitovskosti h
$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{h(\vec{x}, \vec{x})} = \overline{Q(\vec{x})},$$
proto $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.

3. S využitím linearity a antilinearity h dostáváme
$$Q(\alpha\vec{x}) = h(\alpha\vec{x}, \alpha\vec{x}) = \alpha\overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x}).$$

4. Opět s využitím linearity, antilinearity a hermitovskosti h dostáváme
$$\begin{aligned} Q(\vec{x} + \vec{y}) &= h(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= h(\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{y}, \vec{x}) + Q(\vec{y}) \\ &= Q(\vec{x}) + 2Re\,(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}). \end{aligned}$$

5. Jde o přímý důsledek předchozího bodu.

6. Dokažme tvrzení pro $T = \mathbb{C}$, pro $T = \mathbb{R}$ si čtenář obdobným způsobem poradí sám. S využitím 4. bodu a posléze antilinearity a 3. bodu máme

$$\begin{array}{rclcl} Q(\vec{x}+\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) + 2Re\,(h(\vec{x},\vec{y})) + Q(\vec{y}) & & \\ Q(\vec{x}-\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) + 2Re\big(-h(\vec{x},\vec{y})\big) + Q(-\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) - 2Re\,(h(\vec{x},\vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}+i\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) + 2Re\big(-ih(\vec{x},\vec{y})\big) + Q(i\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) + 2Im\,(h(\vec{x},\vec{y})) + Q(\vec{y}) \\ Q(\vec{x}-i\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) + 2Re\big(ih(\vec{x},\vec{y})\big) + Q(i\vec{y}) & = & Q(\vec{x}) - 2Im\,(h(\vec{x},\vec{y})) + Q(\vec{y}), \end{array}$$

odkud plyne

$$Q(\vec{x}+\vec{y}) - Q(\vec{x}-\vec{y}) + iQ(\vec{x}+i\vec{y}) - iQ(\vec{x}-i\vec{y}) = 4Re\,(h(\vec{x},\vec{y})) + i4Im\,(h(\vec{x},\vec{y})) = 4h(\vec{x},\vec{y}).$$

□

Poznámka 32.

- *Někdy se pro označení linearity v 1. argumentu a antilinearity ve 2. argumentu používá pojem* **sesquilineární** *formy. Předložka sesqui- je z latiny a znamená „jeden a půl“.*
- *Pro $T = \mathbb{R}$ lze vynechat komplexní sdružování u vlastnosti antilinearity, tedy taková forma je lineární v 1. i 2. argumentu, hovoříme pak někdy o* **bilineárních** *formách.*
- *Polarizační identity vyjadřují netriviální fakt, že hermitovská forma je jednoznačně určena svou diagonálou.*

Definice 27. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V.* **Nulprostorem** *hermitovské formy h nazveme množinu*

$$N_h = \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x},\vec{y}) = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in V\}.$$

Nulitou *formy h pak rozumíme číslo $\nu(h) = \dim N_h$.*

Aby definice nulity byla korektní, potřebujeme vědět, že nulprostor je podprostorem V.

Věta 47 (O nulprostoru)**.** *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť h je hermitovská forma na V. Pak $N_h \subset\subset V$.*

Důkaz. Z definice plyne, že $N_h \subset V$. Jelikož platí $h(\vec{0},\vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, je $\vec{0} \in N_h$, tedy $N_h \neq \emptyset$. Pokud $\vec{x},\vec{z} \in N_h$ a $\alpha \in T$, pak $h(\alpha\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = \alpha h(\vec{x},\vec{y}) + h(\vec{z},\vec{y}) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$ pro každé $\vec{y} \in V$, proto $\alpha\vec{x}+\vec{z} \in N_h$. □

5.1 Polární báze

Uvažujme nyní vektorový prostor konečné dimenze rovné $n \in \mathbb{N}$ a v něm bázi $\mathcal{X} = (\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$. Najdeme podmínku, kterou musí splňovat báze $\mathcal{X}$, aby v ní hermitovská forma a její diagonála jednoduchý tvar. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j\vec{x}_j$, pak s využitím linearity v 1. a antilinearity ve 2. argumentu dostáváme

$$h(\vec{x},\vec{y}) = h(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{x}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i,\vec{x}_j),$$

$$Q(\vec{x}) = h(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} h(\vec{x}_i,\vec{x}_j).$$

Pokud báze splňuje podmínku $h(\vec{x}_i,\vec{x}_j) = 0$ pro $i \neq j$, zjednoduší se předchozí výrazy následovně:

$$h(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{\beta_i} h(\vec{x}_i,\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{\beta_i} Q(\vec{x}_i),$$

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} h(\vec{x}_i, \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 Q(\vec{x}_i).$$

Jak uvidíme, taková báze vždy existuje.

Definice 28. *Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T, tj.* dim $V = n \in \mathbb{N}$. *Nechť h je hermitovská forma na V_n a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Pokud $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \widehat{n}$, $i \neq j$, pak $\mathcal{A}$ nazveme* **polární báze** *hermitovské formy h.*

Věta 48 (Existence polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T. Pak existuje polární báze h.*

Důkaz. Důkaz jen pro zajímavost (nezkouší se z něj).
Důkaz provedeme indukcí podle $m = \mathrm{codim} N_h$, $0 \leq m \leq n$.

1. Pro $m = 0$ je $N_h = V_n$. Pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$, proto libovolná báze V_n je polární bází h.

2. Nechť pro nějaké m splňující $0 \leq m < n$ a pro každou hermitovskou formu h s $\mathrm{codim} N_h = m$ existuje polární báze. Ukažme, že pak také pro libovolnou hermitovskou formu h s $\mathrm{codim} N_h = m + 1$ existuje polární báze. Jelikož $\mathrm{codim} N_h = m + 1 \geq 1$, existuje jistě $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ tak, že $h(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$. Podle polaričních identit je pak nenulové aspoň jedno z čísel

   - $Q(\vec{x} + \vec{y}), Q(\vec{x} - \vec{y})$ pro $T = \mathbb{R}$,
   - $Q(\vec{x} + \vec{y}), Q(\vec{x} - \vec{y}), Q(\vec{x} + i\vec{y}), Q(\vec{x} - i\vec{y})$ pro $T = \mathbb{C}$.

   Tedy existuje $\vec{a} \in V_n$ takové, že $Q(\vec{a}) \neq 0$.

   Definujme $\varphi : V_n \to T$ pro každé $\vec{x} \in V_n$ vztahem

   $$\varphi(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{a}).$$

   Pak platí:

   - $\varphi \in V_n^{\#}$,
   - $\varphi \neq \Theta$ (protože $\varphi(\vec{a}) = Q(\vec{a}) \neq 0$,
   - defekt $d(\varphi) = n - 1$,
   - označme $L = \mathrm{ker}\varphi$, pak $N_h \subset\subset L$,
   - splňuje-li $P \subset\subset L$, že $N_h \oplus P = L$, pak dim $P = m$ (protože podle předpokladu, že $\mathrm{codim} N_h = m + 1$, je dim $N_h = n - (m + 1) = n - 1 - m$).

   Označme h_L zúžení h na $L \times L$. Pak platí

   - h_L je hermitovská forma na L,
   - $N_{h_L} = N_h$.
     Inkluze $N_h \subset N_{h_L}$ je zřejmá. Vysvětleme, proč platí $N_{h_L} \subset N_h$. Pokud $\vec{x} \in N_{h_L}$, pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ pro každé $\vec{y} \in L$. Potřebujeme ukázat, že $h(\vec{x}, \vec{z}) = 0$ pro každé $\vec{z} \in V_n$. Jelikož $V_n = L \oplus [\vec{a}]_\lambda$, je $\vec{z} = \vec{y} + \alpha\vec{a}$, kde $\vec{y} \in L$. Proto $h(\vec{x}, \vec{z}) = h(\vec{x}, \vec{y}) + \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{a}) = 0 + \overline{\alpha}\varphi(\vec{x}) = 0$, kde v poslední rovnosti jsme využili faktu, že $N_{h_L} \subset L$.

   Jelikož $\mathrm{codim} N_{h_L} = m$ (čímž myslíme dimenzi doplňku $N_{h_L} = N_h$ do L), existuje podle indukčního předpokladu báze $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-1})$ prostoru L, která je polární pro hermitovskou formu h_L. Položíme-li $\vec{a}_n = \vec{a}$, pak $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je báze V_n a je polární pro formu h, neboť $h(\vec{a}_i, \vec{a}_n) = \varphi(\vec{a}_i) = 0$ pro každé $i \in \widehat{n-1}$.

□

Následující tvrzení se hodí pro praktické hledání polární báze.

Věta 49 (Hledání polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Nechť existují $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 q_j,$$

kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$. Pak $q_j = Q(\vec{a}_j)$ pro každé $j \in \widehat{n}$ a $\mathcal{A}$ je polární báze h.

Důkaz. Dosadíme-li $\vec{x} = \vec{a}_j$, pak $Q(\vec{a}_j) = |1|^2 q_j = q_j$. Pro důkaz, že báze je polární, uvažujme $T = \mathbb{C}$. Čtenář obdobným způsobem ověří pro případ $T = \mathbb{R}$, že báze je polární. Podle polarizační identity dostaneme pro $k \neq j$

$$\begin{aligned} h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) &= \tfrac{1}{4}\left(Q(\vec{a}_k + \vec{a}_j) - Q(\vec{a}_k - \vec{a}_j)\right) + \tfrac{i}{4}\left(Q(\vec{a}_k + i\vec{a}_j) - Q(\vec{a}_k - i\vec{a}_j)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(|1|^2 q_k + |1|^2 q_j - |1|^2 q_k - |-1|^2 q_j\right) + \tfrac{i}{4}\left(|1|^2 q_k + |i|^2 q_j - |1|^2 q_k - |-i|^2 q_j\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Příklad 26. *Nechť $V = \mathbb{R}^2$. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 5x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Najděte polární bázi h.*

Řešení*: Snadno ověříme, že h je hermitovská forma. Práci nám ulehčí, uvědomíme-li si, že $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}$. Upravíme diagonálu* **Lagrangeovou metodou** *na součet čtverců. $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1 x_2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Pak postupně dostáváme*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 + 2x_2, & x_1 &= \alpha_1 - 2\alpha_2, \\ \alpha_2 &= x_2, & x_2 &= \alpha_2, \end{aligned}$$

nakonec pak $\vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Odtud vidíme, že pro souřadnice $\vec{x}$ v bázi $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ má diagonála tvar součtu čtverců.

Závěr*: Podle Věty 49 je $\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ polární báze h.*

Podívejme se nyní na vztah mezi nulprostorem a polární bází. Bude se nám hodit následující lemma.

Lemma 6. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Pokud $Q(\vec{a}_i) = 0$, pak $\vec{a}_i \in N_h$.*

Důkaz. Nechť $\vec{y} \in V$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$. Pak s využitím faktu, že $\mathcal{A}$ je polární báze, máme $h(\vec{a}_i, \vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \overline{\alpha_i} Q(\vec{a}_i) = 0$, proto $\vec{a}_i \in N_h$. □

Věta 50 (Nulprostor a polární báze)**.** *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Nechť existuje $k \in \widehat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$ pro každé $j \in \widehat{k}$ a $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro $j > k$. Pak $N_h = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k]_\lambda$.*

Důkaz. Dokazujeme rovnost, tedy dvě inkluze.

- $N_h \supset [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k]_\lambda$: Podle Lemmatu 6 patří $\vec{a}_j$ do nulprostoru pro každé $j \in \widehat{k}$. Jelikož $N_h \subset\subset V_n$, obsahuje N_h i libovolnou LK svých vektorů.

- $N_h \subset [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$: Nechť $\vec{x} \in N_h$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$. Pak pro každé $\vec{y} \in V_n$ platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Dosazujeme-li postupně $\vec{y} = \vec{a}_i$ pro $i > k$, dostáváme

$$h(\vec{x}, \vec{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(\vec{a}_j, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i).$$

Jelikož $Q(\vec{a}_i) \neq 0$, musí být $\alpha_i = 0$ pro $i > k$. Odtud plyne $\vec{x} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{a}_j$, tedy $\vec{x} \in [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$.

□

Poznámka 33. *Pořadí vektorů v polární bázi můžeme vždy změnit tak, že vpředu jsou vektory s nulovou hodnotou diagonály. Snadno pak vidíme, že platí následující tvrzení: Nulprostor je roven LO generovanému těmi vektory z polární báze, které mají nulovou hodnotu diagonály (pokud nějaké takové existují).*

Důsledek 11. *Nechť h je hermitovská forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a Q její diagonála. Nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze V_n. Pak počet nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$ nezáleží na volbě báze $\mathcal{A}$ a je roven nulitě.*

Důkaz. Pokud existuje $j \in \widehat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$, pak tvrzení plyne z Věty 50 a předchozí poznámky. Jestliže $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro každé $j \in \widehat{n}$, pak $N_h = \{\vec{0}\}$. Pokud totiž $\vec{x} \in N_h$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak pro každé $i \in \widehat{n}$ platí $0 = h(\vec{x}, \vec{a}_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h(\vec{a}_j, \vec{a}_i) = \alpha_i Q(\vec{a}_i)$, proto $\alpha_i = 0$, a tedy $\vec{x} = \vec{0}$. □

Definice 29. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $Q : V \to \mathbb{R}$. Říkáme, že Q je* **kvadratická forma***, pokud existuje hermitovská forma h, jejíž je Q diagonálou, tj. pro každé $\vec{x} \in V$ platí $Q(\vec{x}) = h(\vec{x}, \vec{x})$. Hermitovskou formu h pak nazýváme* **polárou** *kvadratické formy Q. Polární bází, nulprostorem a nulitou kvadratické formy Q rozumíme polární bázi, nulprostor a nulitu její poláry h.*

Poznámka 34. *Podle polarizačních identit má každá kvadratická forma Q právě jednu poláru h.*

Věta 51 (Zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je polární báze Q. Označme p, q, r počet kladných, záporných a nulových čísel v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě polární báze.*

Důkaz. Podle Důsledku 11 je $r = \nu(h)$, nezávisí tudíž na volbě polární báze. Dokážeme-li, že ani p nezávisí na volbě polární báze, bude důkaz hotový, protože $q = n - p - r$. Rozlišíme tři případy:

1. Pro $p = 0$ platí pro každé $j \in \widehat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) \leq 0$. Pro každé $\vec{x}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak máme

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \leq 0,$$

proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) \leq 0$.

2. Pro $p = n$ platí pro každé $j \in \widehat{n}$, že $Q(\vec{a}_j) > 0$. Pro každé $\vec{x} \neq \vec{0}$, kde $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (některý z koeficientů α_i je jistě nenulový), pak máme

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0,$$

proto i pro každý vektor $\vec{a}$ z jiné polární báze platí $Q(\vec{a}) > 0$.

3. Pro $0 < p < n$ předpokládejme bez újmy na obecnosti, že vektory polární báze $\mathcal{A}$ jsou seřazeny následovně:

   $$Q(\vec{a}_j) > 0 \quad \text{pro } j \in \widehat{p} \quad \text{a} \quad Q(\vec{a}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > p.$$

   Označme $\mathcal{B} = \{P \subset\subset V_n \mid Q(\vec{x}) > 0 \text{ pro každé } \vec{x} \in P, \vec{x} \neq \vec{0}\}$. Pak $\mathcal{B} \neq \emptyset$, protože $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p]_\lambda \in \mathcal{B}$. Jakmile totiž $\vec{x} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \vec{a}_j$ a alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{p} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

   Ukažme, že pro každé $P \in \mathcal{B}$ je $\dim P \leq p$. Označme $\widehat{P} = [\vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_n]_\lambda$. Pak podobným argumentem jako výše dostáváme, že pro každé $\vec{x} \in \widehat{P}$ platí $Q(\vec{x}) \leq 0$. Proto $P \cap \widehat{P} = \{\vec{0}\}$. Podle první věty o dimenzi dostaneme

   $$\dim P + (n-p) = \dim P + \dim \widehat{P} = \dim (P + \widehat{P}) \leq \dim V_n = n,$$

   tedy $\dim P \leq p$.

   Vezměme jinou polární bázi $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ a opět ji uspořádejme tak, že

   $$Q(\vec{c}_j) > 0 \quad \text{pro } j \in \widehat{\tilde{p}} \quad \text{a} \quad Q(\vec{c}_j) \leq 0 \quad \text{pro } j > \tilde{p}.$$

   Pak $[\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{\tilde{p}}]_\lambda \in \mathcal{B}$, proto $\tilde{p} \leq p$.

   Analogickým způsobem jako výše může čtenář ověřit, že pro každé $P \in \mathcal{B}$ je $\dim P \leq \tilde{p}$. Odtud bychom zase odvodili, že $p \leq \tilde{p}$.

Tedy počet bazických vektorů s kladnou hodnotou kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze. □

Definice 30. *Čísla p, resp. q z Věty 51 nazýváme* **kladný**, *resp.* **záporný index setrvačnosti**. **Signaturou** Q *nazýváme trojici* $\operatorname{sg}(Q) = (p, q, r)$ *a* **hodností** Q *rozumíme číslo* $h(Q) = p + q$.

Definice 31. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V nad T. Říkáme, že Q má charakter (zkráceně Q je):*

1. **pozitivně definitní** *(PD), pokud pro každé $\vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}$ platí $Q(\vec{x}) > 0$,*
2. **pozitivně semidefinitní** *(PSD), pokud pro každé $\vec{x} \in V$ platí $Q(\vec{x}) \geq 0$ a existuje $\vec{x}_0 \in V, \vec{x}_0 \neq \vec{0}$ tak, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,*
3. **negativně definitní** *(ND), pokud pro každé $\vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}$ platí $Q(\vec{x}) < 0$,*
4. **negativně semidefinitní** *(NSD), pokud pro každé $\vec{x} \in V$ platí $Q(\vec{x}) \leq 0$ a existuje $\vec{x}_0 \in V, \vec{x}_0 \neq \vec{0}$ tak, že $Q(\vec{x}_0) = 0$,*
5. **indefinitní**, *pokud existují $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ takové, že $Q(\vec{x}_1) > 0$ a $Q(\vec{x}_2) < 0$.*

O charakteru kvadratické formy lze na prostoru konečné dimenze rozhodnout podle signatury.

Věta 52 (Charakter a signatura)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je polární báze Q. Pak platí*

1. *Q je PD, právě když $p = n, q = 0, r = 0$,*
2. *Q je PSD, právě když $q = 0, r \neq 0$,*
3. *Q je ND, právě když $q = n, p = 0, r = 0$,*
4. *Q je NSD, právě když $p = 0, r \neq 0$,*
5. *Q je indefinitní, právě když $p \neq 0, q \neq 0$.*

Důkaz. Ukážeme platnost prvních dvou bodů. Důkazy dalších bodů jsou analogické.

1. ($\Rightarrow$): Je-li Q PD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí $Q(\vec{a}) > 0$, proto $p = n, q = 0 = r$.
   ($\Leftarrow$): Je-li $p = n, q = 0 = r$, pak pro libovolnou polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ platí $Q(\vec{a}_j) > 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujme libovolný nenulový vektor $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$ (alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$), pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) > 0$.

2. ($\Rightarrow$): Je-li Q PSD, pak pro každý vektor $\vec{a}$ z libovolné polární báze platí $Q(\vec{a}) \geq 0$, proto $q = 0$. Kdyby bylo i $r = 0$, byla by Q podle 1. bodu PD, proto $r \neq 0$.
   ($\Leftarrow$): Je-li $r \neq 0$, pak pro libovolnou polární bázi $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ existuje index i_0 tak, že $Q(\vec{a}_{i_0}) = 0$ (vektor $\vec{a}_{i_0}$ je samořejmě nenulový, jelikož je bazický). Protože $q = 0$, platí $Q(\vec{a}_j) \geq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$. Uvažujeme-li libovolný vektor $\vec{x} \in V_n$ a $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$, pak $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 Q(\vec{a}_j) \geq 0$.

$\square$

5.2 Matice kvadratické formy

Definice 32. *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak* **maticí** *kvadratické formy Q, resp. hermitovské formy h* **v bázi** *$\mathcal{X}$ nazveme matici ${}^{\mathcal{X}}Q = {}^{\mathcal{X}}h$ definovanou $[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} = h(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ pro každé $i, j \in \hat{n}$.*

Věta 53 (Vlastnosti matice ${}^{\mathcal{X}}Q$)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T, h její polára a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ báze V_n. Pak platí*

1. ${}^{\mathcal{X}}Q = ({}^{\mathcal{X}}Q)^H$,
2. *pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$*
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}h\right) \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}},$$
3. *pro každé $\vec{x} \in V_n$*
$$Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}Q\right) \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}},$$
4. *pro každou bázi $\mathcal{Y}$ prostoru V_n*
$${}^{\mathcal{Y}}Q = ({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}Q\right) \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}.$$

Důkaz.

1. Připomeňme, že matice $\mathbb{A}^H$ se získá z $\mathbb{A}$ transponováním a komplexním sdružením prvků. Tvrzení pak plyne z hermitovskosti poláry h
$$[{}^{\mathcal{X}}Q]_{ij} = h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \overline{h(\vec{x}_j, \vec{x}_i)} = [({}^{\mathcal{X}}Q)^H]_{ij}.$$

2. Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ a $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{x}_j$. Pak podle linearity h v 1. argumentu a antilinearity ve 2. argumentu a posléze z definice maticového násobení dostáváme
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j} h(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \left({}^{\mathcal{X}}h\right) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}h\right) \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}.$$

3. Tvrzení získáme z předchozího bodu dosazením $\vec{y} = \vec{x}$.

4. Označme $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$. Pak z definice maticového násobení a z 2. bodu plyne
$$[({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}Q\right) \overline{({}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}})}]_{ij} = ((\vec{y}_i)_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}Q\right) \overline{(\vec{y}_j)_{\mathcal{X}}} = h(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = [{}^{\mathcal{Y}}Q]_{ij}.$$

$\square$

Věta 54 (Hodnost Q a ${}^{\mathcal{X}}Q$)**.** *Nechť Q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V_n nad tělesem T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze V_n. Pak $h(Q) = h({}^{\mathcal{X}}Q)$.*

Důkaz. Podle 4. bodu Věty 53 nezáleží $h({}^{\mathcal{X}}Q)$ na volbě báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n, matice přechodu jsou totiž regulární (tedy i matice k nim transponované a komplexně sdružené jsou regulární) a násobení regulární maticí nemění hodnost. Zvolme tedy za $\mathcal{X}$ polární bázi. Pak ovšem matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je diagonální a na diagonále je posloupnost čísel $(Q(\vec{x}_1), \ldots, Q(\vec{x}_n))$ a počet nenul v ní je roven právě $p + q$. Dostáváme tedy $h({}^{\mathcal{X}}Q) = p + q = h(Q)$. $\square$

Poznámka 35. *V této poznámce shrneme, jak vypadají všechny hermitovské formy na prostorech konečné dimenze.*

1. *Je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňující $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je hermitovská), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A}\overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{C}$ platí*
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}h\right) \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}},$$
kde ${}^{\mathcal{X}}h$ je podle Věty 53 hermitovská matice.

2. *Je-li $\mathcal{X}$ báze V_n nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ (říkáme, že $\mathbb{A}$ je symetrická), pak $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathbb{A}(\vec{y})_{\mathcal{X}}$ je hermitovská forma. Na druhou stranu pro každou hermitovskou formu ve V_n nad $\mathbb{R}$ platí*
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \left({}^{\mathcal{X}}h\right) (\vec{y})_{\mathcal{X}},$$
kde ${}^{\mathcal{X}}h$ je podle Věty 53 hermitovská a reálná, tedy symetrická matice.

Poznámka 36. *Hermitovské formy v prostorech T^n jsou následujícího tvaru.*

1. *Pro $T = \mathbb{C}$ platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A}\overline{\vec{y}}$, kde $\mathbb{A} =^{\mathcal{E}} h$, jde tedy o hermitovskou matici.*

2. *Pro $T = \mathbb{R}$ platí $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A}\vec{y}$, kde $\mathbb{A} =^{\mathcal{E}} h$, jde tedy o symetrickou matici.*

Domácí úkol 6 (2 body)**.** *Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Za jaké podmínky lze $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0}$ doplnit na polární bázi Q (v závislosti na charakteru Q)? Za jaké podmínky lze LN soubor $(\vec{x}, \vec{y})$ z $\mathbb{R}^3$ doplnit na polární bázi Q?*

6 Skalární součin a ortogonalita

6.1 Skalární součin

V celé kapitole si pod tělesem T představujte pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$ (podobně jako pro hermitovské formy by všechna tvrzení platila i pro tělesa, která jsou uzavřená na komplexní sdružování).

Definice 33. *Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $\langle .|. \rangle : V \times V \to T$ nazveme* **skalárním součinem***, pokud $\langle .|. \rangle$ je hermitovská forma s pozitivně definitní diagonálou, tj. platí následující tři axiomy skalárního součinu:*

1. **hermitovskost***: $\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}|\vec{x} \rangle}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$,*
2. **linearita v 1. argumentu***: $\langle \alpha\vec{x} + \vec{y}|\vec{z} \rangle = \alpha\langle \vec{x}|\vec{z} \rangle + \langle \vec{y}|\vec{z} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a každé $\alpha \in T$,*
3. **pozitivní definitnost***: $\langle \vec{x}|\vec{x} \rangle \geq 0$ pro každé $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x}|\vec{x} \rangle = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$.*

Nechť $\vec{x} \in V$, pak jeho normou nazveme $\| \vec{x} \| = \sqrt{\langle \vec{x}|\vec{x} \rangle}$. Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $\langle .|. \rangle$ značíme $\mathcal{H}$.

Poznámka 37. *Je-li $\mathcal{H}$ reálný vektorový prostor, pak je skalární součin* **symetrický***, tedy $\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle = \langle \vec{y}|\vec{x} \rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, a lineární v obou argumentech.*

Věta 55 (Vlastnosti skalárního součinu)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Pak pro každé $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{H}$ a každé $\alpha \in T$ platí:*

1. **antilinearita v 2. argumentu***: $\langle \vec{x}|\alpha\vec{y} + \vec{z} \rangle = \overline{\alpha}\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle + \langle \vec{x}|\vec{z} \rangle$,*
2. *$\| \vec{x} \| \geq 0$ a $\| \vec{x} \| = 0$, právě když $\vec{x} = \vec{0}$,*
3. *$\| \alpha\vec{x} \| = |\alpha| \cdot \| \vec{x} \|$,*
4. **rovnoběžníková rovnost***:*
$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 + \| \vec{x} - \vec{y} \|^2 = 2(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2),$$
5. **polarizační identity***:*
$$\begin{aligned} \text{pro } T = \mathbb{R} \quad \langle \vec{x}|\vec{y} \rangle &= \tfrac{1}{4}(\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 - \| \vec{x} - \vec{y} \|^2), \\ \text{pro } T = \mathbb{C} \quad \langle \vec{x}|\vec{y} \rangle &= \tfrac{1}{4}(\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 - \| \vec{x} - \vec{y} \|^2) + \tfrac{i}{4}(\| \vec{x} + i\vec{y} \|^2 - \| \vec{x} - i\vec{y} \|^2). \end{aligned}$$

Důkaz. Jde o důsledky Věty 46 a definice skalárního součinu a normy. □

Příklad 27. *Nejtypičtějším příkladem skalárního součinu je* **standardní skalární součin** *definovaný:*

- *Pro vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ jako*
$$\langle \vec{x}|\vec{y} \rangle_s = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$
$\mathbb{C}^n$ se standardním skalárním součinem nazýváme **unitární prostor***. Norma vektoru je rovna*
$$\| \vec{x} \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.$$

- *Pro vektory* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *a* $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *jako*

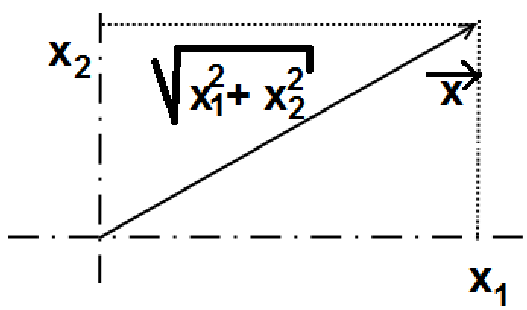
$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle_s = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

  $\mathbb{R}^n$ *se standardním skalárním součinem nazýváme* **eukleidovský prostor**. *Norma vektoru je rovna*

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

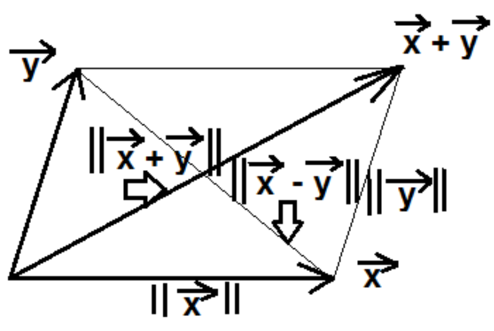
Ověřte, že jsou splněny axiomy skalárního součinu.

Poznámka 38. *Norma v eukleidovských prostorech* $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ *má význam velikosti vektoru. Např. v* $\mathbb{R}^2$ *bychom velikost vektoru* $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ *počítali podle Pythagorovy věty jako* $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, *což je rovno* $\| \vec{x} \|$, *viz Obrázek 3.*



Obrázek 3: Norma vektoru v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá jeho velikosti.

Poznámka 39. *V eukleidovském prostoru* $\mathbb{R}^2$ *odpovídá rovnoběžníková rovnost známému faktu, že součet čtverců délek stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců délek úhlopříček, viz Obrázek 4.*



Obrázek 4: Součet čtverců stran v rovnoběžníku je roven součtu čtverců úhlopříček.

Definice 34. *Nechť je dán vektorový prostor* $\mathcal{H}$ *nad* $\mathbb{R}$. *Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}, \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, *pak úhlem mezi* $\vec{x}$ *a* $\vec{y}$ *nazveme číslo*

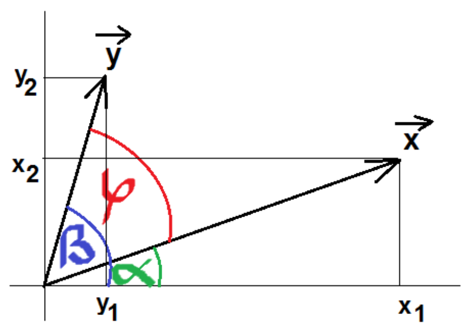
$$\varphi = \arccos \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|}.$$

Poznámka 40. *Funkce* arccos *nabývá hodnot od* 0 *do* π*, proto* $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$*. Dále – jelikož je* arccos *definován na intervalu* $\langle -1, 1 \rangle$*, pro korektnost definice je třeba, aby* $-1 \leq \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1$*. Platnost těchto nerovností vyplyne ze Schwarzovy-Cauchyovy nerovnosti.*

Poznámka 41. *Vyšetřeme, kdy je úhel nulový, ostrý, pravý, tupý a přímý.*

- $\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = 1$,
- φ *ostrý, tj.* $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \geq 0$ *a* $\varphi \neq 0$,
- φ *pravý, tj.* $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$,
- φ *tupý, tj.* $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Leftrightarrow \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle < 0$ *a* $\varphi \neq \pi$,
- φ *přímý, tj.* $\varphi = \pi \Leftrightarrow \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = -1$.

Poznámka 42. *Definice úhlu odpovídá v eukleidovském prostoru* $\mathbb{R}^2$ *definici, kterou známe ze střední školy. Mějme dány vektory* $\vec{x}, \vec{y}$*, viz Obrázek 5. Pak z Obrázku 5 vyčteme*



Obrázek 5: Úhel mezi vektory v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\| \vec{x} \|}, \ \sin\alpha = \frac{x_2}{\| \vec{x} \|}, \ \cos\beta = \frac{y_1}{\| \vec{y} \|}, \ \sin\beta = \frac{y_2}{\| \vec{y} \|}.$$

Přímo z definice kosinu a sinu lze ověřit platnost součtového vzorce

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha.$$

Po dosazení vyjádření pro sinus a kosinus dostáváme

$$\cos\varphi = \cos(\beta - \alpha) = \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{\| \vec{x} \| \| \vec{y} \|} = \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\| \vec{x} \| \| \vec{y} \|}.$$

Věta 56 (Schwarzova-Cauchyova nerovnost)**.** *Nechť* $\mathcal{H}$ *je vektorový prostor nad tělesem* T*. Nechť* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$*. Pak*

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| .$$

Rovnost nastává, právě když je soubor $(\vec{x}, \vec{y})$ *LZ.*

Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

- Pro $\vec{y}=\vec{0}$ je platnost nerovnosti evidentní. Uvažujme $\vec{y}\neq\vec{0}$. Pro libovolné $\alpha\in T$ platí
$$0\leq\ \langle\vec{x}-\alpha\vec{y}|\vec{x}-\alpha\vec{y}\rangle=\parallel\vec{x}\parallel^2-\alpha\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle-\overline{\alpha}\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+|\alpha|^2\parallel\vec{y}\parallel^2.$$
Položme $\alpha:=\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|^2}$, pak z předchozího vztahu dostáváme
$$0\leq\parallel\vec{x}\parallel^2-\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\parallel\vec{y}\parallel^2}\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle-\frac{\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle}{\parallel\vec{y}\parallel^2}\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\left|\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\parallel\vec{y}\parallel^2}\right|^2\parallel\vec{y}\parallel^2=\parallel\vec{x}\parallel^2-\frac{|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|^2}{\parallel\vec{y}\parallel^2}.$$
Odtud plyne nerovnost $|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|^2\leq\parallel\vec{x}\parallel^2\parallel\vec{y}\parallel^2$, tedy také $|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|\leq\parallel\vec{x}\parallel\parallel\vec{y}\parallel$.
- Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nastává-li rovnost ve Schwarzově-Cauchově nerovnosti, pak z předchozí části důkazu plyne, že buď je $\vec{y}=\vec{0}$, nebo je $\vec{x}=\alpha\vec{y}$, kde $\alpha=\frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|^2}$.
($\Leftarrow$) : Je-li soubor $(\vec{x},\vec{y})$ LZ, pak buď $\vec{x}=\vec{0}$ a rovnost zřejmě platí, nebo je $\vec{y}=\beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta\in T$. Pak $|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|=|\langle\vec{x}|\beta\vec{x}\rangle|=|\beta|\parallel\vec{x}\parallel^2=\parallel\beta\vec{x}\parallel\parallel\vec{x}\parallel=\parallel\vec{y}\parallel\parallel\vec{x}\parallel$.

□

Poznámka 43. *Podle definice úhlu a Schwarzovy-Cauchyovy nerovnosti máme, že vektory svírají nulový nebo přímý úhel, právě když jsou lineárně závislé. To opět odpovídá naší představě z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$.*

Poznámka 44. *Pamatujte si, kdy nastává rovnost ve Schwarzově-Cauchyově nerovnosti. Je totiž snazší ověřit, zda jsou dva vektory LZ, než počítat skalární součin a normy.*

Věta 57 (Trojúhelníková nerovnost). *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{H}$. Pak*
$$\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel\leq\parallel\vec{x}\parallel+\parallel\vec{y}\parallel.$$
Rovnost nastává, právě když existuje $\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\geq 0$ tak, že $\vec{x}=\alpha\vec{y}$ nebo $\vec{y}=\alpha\vec{x}$.

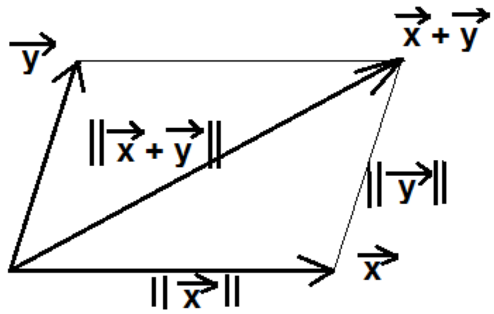
Důkaz. Nejprve ověříme, že platí nerovnost. Poté se podíváme, kdy nastává rovnost.

- $$\begin{aligned}\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel^2 &= \parallel\vec{x}\parallel^2+\parallel\vec{y}\parallel^2+\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle\\ &= \parallel\vec{x}\parallel^2+\parallel\vec{y}\parallel^2+\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle+\overline{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}\\ &= \parallel\vec{x}\parallel^2+\parallel\vec{y}\parallel^2+2\mathrm{Re}\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle\\ &\leq \parallel\vec{x}\parallel^2+\parallel\vec{y}\parallel^2+2|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|\\ &\leq \parallel\vec{x}\parallel^2+\parallel\vec{y}\parallel^2+2\parallel\vec{x}\parallel\parallel\vec{y}\parallel\\ &= (\parallel\vec{x}\parallel+\parallel\vec{y}\parallel)^2,\end{aligned}$$
kde předposlední nerovnost je Schwarzova-Cauchyova.
- Dokazujeme ekvivalenci, tedy dvě implikace.
($\Rightarrow$) : Nastává-li rovnost v trojúhelníkové nerovnosti, pak z předchozí části důkazu plyne, že nastává rovnost ve Schwarzově-Cauchyově nerovnosti, tedy $\vec{x}=\vec{0}$ (pak $\vec{x}=0\vec{y}$, neboli $\vec{x}$ je nezáporný násobek $\vec{y}$) nebo $\vec{x}\neq\vec{0}$ a $\vec{y}=\beta\vec{x}$ pro nějaké $\beta\in T$. Dále z předchozí části důkazu plyne, že platí $\mathrm{Re}\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle=|\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle|$, odkud máme $\mathrm{Re}\langle\vec{x}|\beta\vec{x}\rangle=|\langle\vec{x}|\beta\vec{x}\rangle|$, tedy $\mathrm{Re}\beta=|\beta|$, proto $\beta\in\mathbb{R}$ a $\beta\geq 0$.
($\Leftarrow$) : Platí-li $\vec{y}=\alpha\vec{x}$ pro nějaké $\alpha\geq 0$, pak
$$\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel=\parallel\vec{x}+\alpha\vec{x}\parallel=\parallel(1+\alpha)\vec{x}\parallel=(1+\alpha)\parallel\vec{x}\parallel=\parallel\vec{x}\parallel+\alpha\parallel\vec{x}\parallel=\parallel\vec{x}\parallel+\parallel\alpha\vec{x}\parallel=\parallel\vec{x}\parallel+\parallel\vec{y}\parallel.$$
Podobně dostaneme, že rovnost platí, je-li $\vec{x}=\alpha\vec{y}$ pro nějaké $\alpha\geq 0$.

□

Poznámka 45. *V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá trojúhelníková nerovnost známému faktu, že v trojúhelníku je součet délek dvou stran vždy větší než strana třetí, viz Obrázek 6.*

Poznámka 46. *Pamatujte si, kdy nastává rovnost v trojúhelníkové nerovnosti. Je totiž snazší ověřit, zda je jeden vektor nezáporným násobkem druhého, než počítat příslušné normy.*



Obrázek 6: V trojúhelníku je součet libovolných dvou stran větší než strana třetí.

6.2 Ortogonalita

Definice 35. *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T.*

1. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Řekneme, že $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou* **kolmé (ortogonální)**, *platí-li $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$.*
2. *Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je soubor vektorů z $\mathcal{H}$. Soubor nazveme*
   (a) **ortogonální (OG)**, *pokud $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = 0$ pro každé $i, j \in \widehat{n}, i \neq j$,*
   (b) **ortonormální (ON)**, *pokud $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$, kde Kroneckerovo delta $\delta_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \widehat{n}, i \neq j$ a $\delta_{ii} = 1$ pro každé $i \in \widehat{n}$.*

Poznámka 47. *Pokud $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG soubor nenulových vektorů, pak $(\frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1, \ldots, \frac{1}{\|\vec{x}_n\|}\vec{x}_n)$ je ON soubor.*

Poznámka 48. *Vektory ON souboru jsou nutně nenulové, pro OG soubor to neplatí.*

Příklad 28. *Nejjednodušším ON souborem v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ a v unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$ je standardní báze.*

Věta 58 (LN OG souboru nenulových vektorů)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG soubor nenulových vektorů z $\mathcal{H}$. Pak $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$. Vynásobme obě strany vektorem $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$.

$$\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \langle \vec{0} | \vec{x}_j \rangle = 0.$$

Podle linearity skalárního součinu v 1. argumentu a ortogonality souboru upravíme levou stranu rovnosti.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \alpha_j \langle \vec{x}_j | \vec{x}_j \rangle = 0.$$

Jelikož $\vec{x}_j \neq \vec{0}$, dostáváme $\alpha_j = 0$ pro každé $j \in \widehat{n}$, čímž je dokázána LN souboru. □

Důsledek 12. *Každý ON soubor je LN.*

Věta 59 (Souřadnice v OG bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG báze $\mathcal{H}$. Nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Pak $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}$.*

Důkaz. Nechť $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k$. Vynásobme obě strany vektorem $\vec{x}_i$.

$$\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k | \vec{x}_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle \vec{x}_k | \vec{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \vec{x}_i | \vec{x}_i \rangle,$$

kde jsme opět využili linearity skalárního součinu v 1. argumentu a ortogonality báze. Odtud dostáváme $\alpha_i = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\| \vec{x}_i \|^2}$ (dělíme nenulovým číslem, protože jde o bazické, tedy nenulové vektory). $\square$

Důsledek 13 (Souřadnice v ON bázi)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}$. Nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Pak $\vec{x}_i^{\#}(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle$.*

Definice 36. *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze $\mathcal{H}$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme* **Fourierovy koeficienty** *v bázi $\mathcal{X}$.*

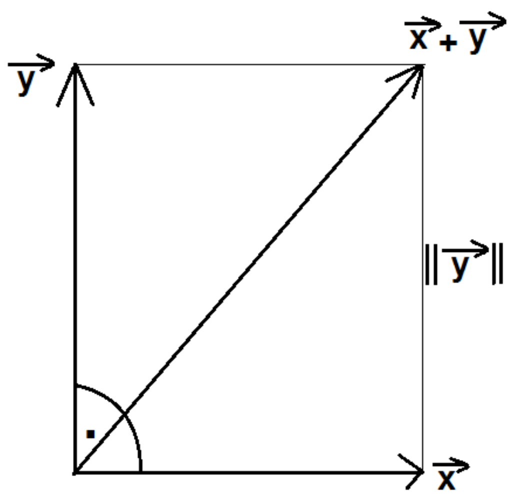
Věta 60 (Pythagorova věta)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pokud $(\vec{x}, \vec{y})$ je OG soubor, pak*

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 .$$

Důkaz. Je-li $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$, pak $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + 2Re\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \| \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$. $\square$

Poznámka 49. *Z důkazu je vidět, že v reálných prostorech platí i opačná implikace v Pythagorově větě. V komplexních prostorech ale platit nemusí. Např. v unitárním $\mathbb{C}^2$ splňují vektory $\vec{x} = \binom{i}{0}$ a $\vec{y} = \binom{1}{0}$, že $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$, přesto $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = i \neq 0$.*

Poznámka 50. *V $\mathbb{R}^2$ odpovídá tvrzení "klasické" Pythagorově větě, která říká, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou, viz Obrázek 7.*



Obrázek 7: Součet obsahů čtverců nad odvěsnami v pravoúhlém trojúhelníku je roven obsahu čtverce nad přeponou.

Věta 61 (Gramova-Schmidtova věta)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je LN soubor v $\mathcal{H}$. Pak existuje OG (i ON) soubor $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ takový, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$.*
Slovy: "Každý LN soubor lze ortogonalizovat (i ortonormalizovat)."

Důkaz. Pomocí tzv. Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu vyrobíme OG soubor splňující podmínky věty. Na závěr každý z vektorů vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž podle Poznámky 47 vyrobíme ON soubor splňující podmínky z věty.

Postupujme indukcí podle počtu vektorů v OG souboru. Položme $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$. Pak je splněno $[\vec{x}_1]_\lambda = [\vec{y}_1]_\lambda$ a $(\vec{y}_1)$ je jistě OG. Nechť je zkonstruován OG soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ splňující $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro nějaké $1 \le k < n$. Další vektor hledáme ve tvaru

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i.$$

Při takovém předpisu bude zřejmě platit, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}]_\lambda$. Zbývá tedy najít koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tak, aby $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1})$ byl OG. Koeficienty najdeme z podmínek $\langle \vec{y}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle = 0$ pro každé $j \in \widehat{k}$. Dostáváme

$$\langle \vec{y}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle = 0 = \langle \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{y}_i | \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \vec{y}_i | \vec{y}_j \rangle = \langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle - \alpha_j \langle \vec{y}_j | \vec{y}_j \rangle,$$

kde jsme využili linearity skalárního součinu v 1. argumentu a ortogonality souboru $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$. Koeficienty α_j jsme našli, mají tvar $\alpha_j = \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle}{\| \vec{y}_j \|^2}$. Dělíme jistě nenulovým číslem, neboť díky rovnosti $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ a lineární nezávislosti $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ také LN. □

Poznámka 51. *Můžeme si tedy zapamatovat vzorec $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_i \rangle}{\| \vec{y}_i \|^2} \vec{y}_i$, pomocí něhož lze vyrábět z LN souborů OG soubory se stejným lineárním obalem. Ovšem na cvičeních si ukážeme metody, které jsou pro praktický výpočet vhodnější než tento vzorec.*

Důsledek 14 (Existence ON báze)**.** *Každý nenulový vektorový prostor $\mathcal{H}$ konečné dimenze nad tělesem T má ON bázi.*

Důkaz. Jelikož je $0 < \dim \mathcal{H} < +\infty$, má $\mathcal{H}$ bázi. To je LN soubor a podle Gramovy-Schmidtovy věty jej lze ortonormalizovat. □

Poznámka 52. *Z důkazu Gramovy-Schmidtovy věty je vidět, že pro ON soubor $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k)$ v $\mathcal{H}$ a pro $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že vektor $\vec{x} - \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{y}_j \rangle \vec{y}_j$ je kolmý na $\vec{y}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$.*

Věta 62 (Besselova nerovnost)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je ON soubor v $\mathcal{H}$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí*

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2 \le \| \vec{x} \|^2 .$$

Důkaz. Rozepíšeme následující nerovnost podle vlastností skalárního součinu a využijeme Poznámku 52:

$$0 \le \Big\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\Big|\; \vec{x} - \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j \Big\rangle = \Big\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\Big|\; \vec{x} \Big\rangle - \sum_{j=1}^{k} \overline{\langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle} \Big\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\Big|\; \vec{x}_j \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \;\Big|\; \vec{x} \Big\rangle = \| \vec{x} \|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2.$$

□

Definice 37. *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ z $\mathcal{H}$ nazveme* **úplný***, pokud*

1. $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ je ON,

2. *neexistuje nenulový vektor, který by byl kolmý na $\vec{x}_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$.*

Věta 63 (O úplných souborech)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ON soubor v $\mathcal{H}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

1. *$\mathcal{X}$ je úplný soubor,*
2. *$\mathcal{X}$ je báze,*
3. *pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$,*
4. *pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ platí $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \overline{\langle \vec{y} | \vec{x}_i \rangle}$,*
5. *pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí* **Parsevalova rovnost**

$$\| \vec{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2.$$

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.
1. $\Rightarrow$ 2.: $\mathcal{X}$ je LN a generuje $\mathcal{H}$, protože podle Poznámky 52 je pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ vektor $\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$ kolmý na $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$, tedy z úplnosti souboru plyne, že $\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i = \vec{0}$, tedy $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$.
2. $\Rightarrow$ 3.: Již víme, že v ON bázi jsou souřadnicemi vektoru právě Fourierovy koeficienty, viz Důsledek 13.
3. $\Rightarrow$ 4.: Jasné.
4. $\Rightarrow$ 5.: Jasné.
5. $\Rightarrow$ 1.: Je-li $\vec{x}$ kolmý na všechny vektory $\vec{x}_i$, pak $\| \vec{x} \|^2 = 0$, tedy $\vec{x} = \vec{0}$. □

Definice 38. *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$.* **Ortogonálním doplňkem** *M do $\mathcal{H}$ nazveme množinu*

$$M^{\perp} = \{ \vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in M \}.$$

Věta 64 (Vlastnosti OG doplňku)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $M \subset \mathcal{H}, M \neq \emptyset$. Pak platí:*

1. *$M^{\perp} \subset\subset \mathcal{H}$,*
2. *$M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.*

Důkaz.
1. $M^{\perp}$ je neprázdný, protože $\vec{0} \in M^{\perp}$. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M^{\perp}$ a $\alpha \in T$, pak pro každé $\vec{y} \in M$ platí $\langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle = 0$ a $\langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$. Odtud $\langle \alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}_1 | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2 | \vec{y} \rangle = 0$, tedy $\alpha \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in M^{\perp}$.
2. Platnost inkluze plyne z definice doplňku.

□

Věta 65 (O OG rozkladu)**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad T. Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a* $\dim P < +\infty$. *Pak platí:*

1. *$\mathcal{H} = P \oplus P^{\perp}$,*
2. *$(P^{\perp})^{\perp} = P$.*

Důkaz.
1. Ošetříme dva případy.
   - Je-li $P = \{\vec{0}\}$, pak $P^{\perp} = \mathcal{H}$ a $\mathcal{H} = \{\vec{0}\} \oplus \mathcal{H}$.

- Nechť $P \neq \{\vec{0}\}$, pak existuje ON báze P $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že $\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$ je kolmý na $\vec{x}_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$, tedy je kolmý i na všechny vektory z P. Odtud plyne, že
$$\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P^{\perp}.$$
Jelikož $\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i \in P$, je tím dokázáno, že $\mathcal{H} = P + P^{\perp}$. Direktnost součtu plyne z faktu, že $P \cap P^{\perp}$ obsahuje vektory kolmé na sebe sama, tedy $P \cap P^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

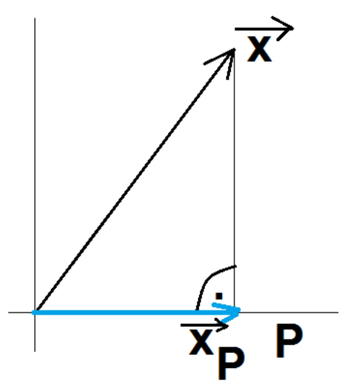
2. Už víme, že $P \subset (P^{\perp})^{\perp}$.
$(P^{\perp})^{\perp} \subset P$: Podle již dokázaného 1. bodu pro každý $\vec{x} \in (P^{\perp})^{\perp} \subset \mathcal{H}$ existují $\vec{p} \in P$ a $\vec{q} \in P^{\perp}$ takové, že $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$. Dokážeme-li, že $\vec{q} = \vec{0}$, pak bude jasné, že $\vec{x} \in P$. Násobením vektorem $\vec{q}$ dostaneme
$$\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{p} | \vec{q} \rangle + \langle \vec{q} | \vec{q} \rangle.$$
Z definice OG doplňku je zřejmé, že $\langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = 0$ a zároveň $\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = 0$, proto $\langle \vec{q} | \vec{q} \rangle = 0$, tedy $\vec{q} = \vec{0}$.

$\square$

Definice 39. *Nechť $P \subset\subset \mathcal{H}$ a nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Je-li $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^{\perp}}$, kde $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^{\perp}} \in P^{\perp}$, pak vektor $\vec{x}_P$ se nazývá* **ortogonální (OG) průmět** *$\vec{x}$ do P.*

Poznámka 53. *V důkazu 1. bodu Věty 65 je uvedeno, jak lze OG průmět $\vec{x}$ do P konstruovat, známe-li v P ON bázi $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. Platí*
$$\vec{x}_P = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{x} | \vec{x}_j \rangle \vec{x}_j.$$
Ovšem stejně jako u Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu i tady platí, že výhodnější bude konstruovat v praktických příkladech OG průměty jinými způsoby.

Poznámka 54. *V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ odpovídá průmět vektoru naší představě kolmého promítání. Např. pro podprostor $P = [\vec{e}_1]_{\lambda}$, tedy přímku odpovídající ose x, je OG průmět vektoru $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}$ podle vzorce v Poznámce 53 roven $\vec{x}_P = \langle \vec{x} | \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = x_1 \vec{e}_1$, viz Obrázek 8.*



Obrázek 8: Ortogonální průmět vektoru na přímku.

Poznámka 55. *Vraťme se ještě jednou ke Gramovu-Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu a všimněme si, jak se dá vyjádřit konstrukce OG souboru vektorů pomocí pojmu OG průmět. Připomeňme, že* *úlohou je konstruovat OG soubor* $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ *takový, že* $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ *pro každé* $k \in \widehat{n}$*, kde* $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ *je LN soubor. Odvodili jsme vzorec pro výpočet*

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_j \rangle}{\| \vec{y}_j \|^2} \vec{y}_j = \vec{x}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x}_{k+1} | \frac{1}{\| \vec{y}_j \|} \vec{y}_j \rangle \frac{1}{\| \vec{y}_j \|} \vec{y}_j,$$

kde $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k)$ *je OG soubor, tedy* $(\frac{1}{\|\vec{y}_1\|}\vec{y}_1, \ldots, \frac{1}{\|\vec{y}_k\|}\vec{y}_k)$ *je ON soubor. Tedy pomocí pojmu OG průmět můžeme psát* $\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - (\vec{x}_{k+1})_P$*, přičemž* $P = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$*. Neboli* $\vec{y}_{k+1}$ *získáme tak, že si z* $\vec{x}_{k+1}$ *necháme pouze část, která je kolmá na* P*, a patří tedy do* $P^\perp$*.*

7 Metrická geometrie

Jedná se o lineární geometrii ve vektorových prostorech se skalárním součinem. V takových prostorech budeme navíc umět měřit vzdálenosti a úhly.

V celé kapitole uvažujeme pouze $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$, pracujeme totiž se skalárním součinem.

7.1 Vzdálenosti

Definice 40. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť $M_1, M_2 \neq \emptyset$ a $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$. Pak* **vzdáleností** *$M_1$ a M_2 nazveme číslo*

$$\rho(M_1, M_2) = \inf\{\| \vec{x} - \vec{y} \| \big| \, \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}.$$

Poznámka 56. *Díky neprázdnosti množin M_1 a M_2 je $\rho(M_1, M_2) \neq +\infty$ a díky nezápornosti normy je $\rho(M_1, M_2) \geq 0$.*

Příklad 29. *I když $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, může být vzdálenost M_1 a M_2 nulová. Například v prostoru $\mathbb{R}^1$ indukuje standardní skalární součin normu $\| x \| = |x|$. Čtenář si snadno rozmyslí, že pak vzdálenost otevřených intervalů $M_1 = (0, 1)$ a $M_2 = (1, 2)$ je rovna nule.*

Popíšeme nyní několik případů, kdy lze vzdálenost počítat jednodušeji než z definice.

Věta 66 (Vzdálenost bodu od podprostoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť $\vec{a} \in \mathcal{H}$, $P \subset\subset \mathcal{H}$ a $\dim P < +\infty$. Pak $\rho(\vec{a}, P) = \| \vec{a}_{P^\perp} \|$.*

Důkaz. Podle definice je $\rho(\vec{a}, P) = \inf\{\| \vec{a} - \vec{x} \| \big| \, \vec{x} \in P\}$. Ukažme nejprve, že $\rho(\vec{a}, P) \geq \| \vec{a}_{P^\perp} \|$. Konečnou dimenzi potřebujeme, abychom mohli použít Větu 65 o OG rozkladu. Pro každé $\vec{x} \in P$ platí

$$\langle \vec{a}-\vec{x} | \vec{a}-\vec{x} \rangle = \langle \vec{a}_{P^\perp} + (\vec{a}_P - \vec{x}) | \vec{a}_{P^\perp} + (\vec{a}_P - \vec{x}) \rangle = \langle \vec{a}_{P^\perp} | \vec{a}_{P^\perp} \rangle + \langle \vec{a}_P - \vec{x} | \vec{a}_P - \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}_P - \vec{x} | \vec{a}_{P^\perp} \rangle + \langle \vec{a}_{P^\perp} | \vec{a}_P - \vec{x} \rangle.$$

Oba poslední výrazy jsou nulové, protože jde o součin vektorů z P a $P^\perp$. Máme tedy

$$\| \vec{a} - \vec{x} \|^2 = \| \vec{a}_{P^\perp} \|^2 + \| \vec{a}_P - \vec{x} \|^2 \geq \| \vec{a}_{P^\perp} \|^2,$$

proto také $\| \vec{a} - \vec{x} \| \geq \| \vec{a}_{P^\perp} \|$ pro každé $\vec{x} \in P$.

Při volbě $\vec{x} = \vec{a}_P$ dokonce nastává rovnost $\| \vec{a} - \vec{x} \| = \| \vec{a}_{P^\perp} \|$, proto je infimum rovno minimu, a to $\rho(\vec{a}, P) = \| \vec{a}_{P^\perp} \|$. □

Poznámka 57. *V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ (viz Obrázek 8) a $\mathbb{R}^3$ odpovídá vzdálenost bodu od přímky či bodu od roviny naší představě – spustí se kolmice z bodu na přímku či rovinu a její délka se změří.*

Také vzdálenost dvou lineárních variet budeme umět převést na vzdálenost bodu od podprostoru.

Věta 67 (Vzdálenost variet)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v $\mathcal{H}$ a $\vec{a}_1 \in W_1$ a $\vec{a}_2 \in W_2$. Pak $\rho(W_1, W_2) = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2))$.*

Důkaz. Jelikož $W_1 = \vec{a}_1 + \mathcal{Z}(W_1)$ a $W_2 = \vec{a}_2 + \mathcal{Z}(W_2)$, máme

$$\rho(W_1, W_2) = \inf\{\| \vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2 \| \big| \, \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\}.$$

Čtenář si snadno rozmyslí, že platí také rovnost

$$\inf\{\| \vec{a}_1 + \vec{s}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s}_2 \| \big| \, \vec{s}_1 \in \mathcal{Z}(W_1), \vec{s}_2 \in \mathcal{Z}(W_2)\} = \inf\{\| \vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s} \| \big| \, \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\},$$

čímž je důkaz hotov, neboť

$$\inf\{\| \vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{s} \| \big| \, \vec{s} \in \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)\} = \rho(\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \mathcal{Z}(W_1) + \mathcal{Z}(W_2)).$$

□

Pro výpočet vzdálenosti bodu od nadroviny potřebujeme zavést pojem normálový vektor. Při té příležitosti také popíšeme nadroviny a posléze všechny lineární variety pomocí normálových rovnic.

7.2 Popis nadrovin ve vektorových prostorech se skalárním součinem

Definice 41. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a W je lineární varieta v $\mathcal{H}$. Pak každý nenulový vektor $\vec{n}_W \in \mathcal{Z}(W)^\perp$ nazveme* **normálovým vektorem** *variety W.*

Lemma 7. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T, $\vec{n} \in \mathcal{H}, \vec{n} \neq \vec{0}$ a $\alpha \in T$. Pak*

$$W = \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\}$$

je nadrovina v $\mathcal{H}$.

Důkaz. Definujme $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Z linearity skalárního součinu v 1. argumentu vidíme, že $\varphi \in \mathcal{H}^\#$. Pak ze zimního semestru víme, že W je nadrovina. □

Věta 68 (Nadrovina v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a W je nadrovina v $\mathcal{H}$,* $\dim W < +\infty$. *Pak existuje $\vec{n} \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$ takové, že $W = \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\}$.*

Důkaz. Jelikož jsou splněny předpoklady Věty 65, platí $\mathcal{Z}(W) \oplus \mathcal{Z}(W)^\perp = \mathcal{H}$. Protože dále $\operatorname{codim} W = 1$, plyne odtud, že $\dim \mathcal{Z}(W)^\perp = 1$, proto $\mathcal{Z}(W)^\perp = [\vec{n}_W]_\lambda$. Nyní stačí zvolit $\vec{n} = \vec{n}_W$ a $\alpha = \langle \vec{a} | \vec{n} \rangle$ pro libovolné $\vec{a} \in W$.

Inkluze $\vec{a} + \mathcal{Z}(W) \subset \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\}$ pak platí evidentně. Zbývá ověřit druhou inkluzi $\{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha\} \subset \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$: Nechť $\vec{x} \in \mathcal{H}$ splňuje $\langle \vec{x} | \vec{n} \rangle = \alpha$, pak $\vec{x} - \vec{a}$ splňuje $\langle \vec{x} - \vec{a} | \vec{n} \rangle = 0$. Odtud již plyne, že $\vec{x} - \vec{a} \in \mathcal{Z}(W)$, tudíž $\vec{x} \in \vec{a} + \mathcal{Z}(W)$. □

Věta 69 (Lineární varieta v $\mathcal{H}$)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a W je lineární varieta v $\mathcal{H}$,* $\dim W < +\infty$ *a* $\operatorname{codim} W = k \in \mathbb{N}$. *Pak existuje LN soubor $(\vec{n}_1, \ldots, \vec{n}_k)$ z $\mathcal{H}$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T$ takové, že $W = \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i \text{ pro každé } i \in \widehat{k}\}$.*

Důkaz. Důkaz je analogií předchozího důkazu, provedeme proto pouze jeho náznak. Jelikož jsou splněny předpoklady Věty 65, platí $\mathcal{Z}(W) \oplus \mathcal{Z}(W)^\perp = \mathcal{H}$. Protože dále $\operatorname{codim} W = k$, plyne odtud, že $\dim \mathcal{Z}(W)^\perp = k$. Nyní stačí zvolit za LN soubor libovolnou bázi $\mathcal{Z}(W)^\perp$ a stačí vybrat libovolné $\vec{a} \in W$ a položit $\alpha_i = \langle \vec{a} | \vec{n}_i \rangle$ pro každé $i \in \widehat{k}$. □

Poznámka 58. *Rovnice $\langle \vec{x} | \vec{n}_i \rangle = \alpha_i$ pro každé $i \in \widehat{k}$ z Věty 69 rozepsané po souřadnicích nazýváme* **normálové rovnice** *variety W v příslušné bázi. Jde o speciální případ neparametrických rovnic, které známe ze zimního semestru.*

Poznámka 59. *Stejně dobře bychom ve Větách 68 a 69 mohli předpokládat, že* $\dim \mathcal{H} < +\infty$. *Z faktu, že je* $\dim W < +\infty$ *plyne, že $\mathcal{H} = \mathcal{Z}(W) \oplus \mathcal{Z}(W)^\perp$, proto* $\dim \mathcal{H} = \dim W + 1$, *je-li W nadrovina, respektive* $\dim \mathcal{H} = \dim W + k$, *má-li W kodimenzi rovnu k.*

Příklad 30. *Nechť* $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ *v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte normálové rovnice W ve standardní bázi.*

Řešení: *Snadno nahlédneme, že* $\mathcal{Z}(W)^\perp = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. *Normálové rovnice získáme ze součinů*

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Závěr: *Normálové rovnice jsou $y = 2$ a $x + z = 4$.*

Nyní se můžeme vrátit k poslední vzdálenosti, kterou se naučíme počítat jednodušším způsobem.

Věta 70 (Vzdálenost bodu od nadroviny)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a W je nadrovina daná rovnicí $\langle\vec{x}|\vec{n}_W\rangle = \alpha$. Nechť $\vec{b} \in \mathcal{H}$. Pak*

$$\rho(\vec{b}, W) = \frac{|\langle\vec{b}|\vec{n}_W\rangle - \alpha|}{\| \vec{n}_W \|}.$$

Důkaz. Nechť $\vec{a} \in W$. Pak $\rho(\vec{b}, W) = \rho(\vec{b} - \vec{a}, \mathcal{Z}(W)) = \| (\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^\perp} \|$. Zdůrazněme, že $\vec{n}_W \neq \vec{0}$, jelikož W je nadrovina. Podle vzorce v Poznámce 53 pro výpočet OG průmětu do $\mathcal{Z}(W)^\perp$ při použití ON báze $(\frac{1}{\|\vec{n}_W\|}\vec{n}_W)$ dostáváme

$$(\vec{b} - \vec{a})_{\mathcal{Z}(W)^\perp} = \left\langle \vec{b} - \vec{a} \middle| \frac{1}{\| \vec{n}_W \|}\vec{n}_W \right\rangle \frac{1}{\| \vec{n}_W \|}\vec{n}_W = \frac{\langle\vec{b}|\vec{n}_W\rangle - \langle\vec{a}|\vec{n}_W\rangle}{\| \vec{n}_W \|^2}\vec{n}_W = \frac{\langle\vec{b}|\vec{n}_W\rangle - \alpha}{\| \vec{n}_W \|^2}\vec{n}_W.$$

Znormujeme-li OG průmět, máme $\frac{|\langle\vec{b}|\vec{n}_W\rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|^2} \| \vec{n}_W \| = \frac{|\langle\vec{b}|\vec{n}_W\rangle - \alpha|}{\|\vec{n}_W\|}$. □

7.3 Úhly

Už známe úhly mezi vektory, nyní zobecníme pojem úhlu ještě pro několik speciálních typů množin.

Definice 42. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$.*

- *Nechť p, q jsou přímky v $\mathcal{H}$. Pak* **úhlem mezi přímkami** *p a q nazveme číslo*

  $$\arccos \frac{|\langle\vec{s}_p|\vec{s}_q\rangle|}{\| \vec{s}_p \| \cdot \| \vec{s}_q \|},$$

  kde $\vec{s}_p$, respektive $\vec{s}_q$, je směrový vektor přímky p, respektive q.

- *Nechť p je přímka a W je nadrovina v $\mathcal{H}$ a $\dim W < +\infty$. Pak* **úhlem mezi přímkou** *p* **a nadrovinou** *W nazveme číslo*

  $$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\langle\vec{s}_p|\vec{n}_W\rangle|}{\| \vec{s}_p \| \cdot \| \vec{n}_W \|},$$

  kde $\vec{s}_p$ je směrový vektor přímky p a $\vec{n}_W$ je normálový vektor nadroviny W.

- *Nechť W_1 a W_2 jsou nadroviny v $\mathcal{H}$, $\dim W_1 < +\infty$ a $\dim W_2 < +\infty$. Pak* **úhlem mezi nadrovinami** *W_1 a W_2 nazveme číslo*

  $$\arccos \frac{|\langle\vec{n}_{W_1}|\vec{n}_{W_2}\rangle|}{\| \vec{n}_{W_1} \| \cdot \| \vec{n}_{W_2} \|},$$

  kde $\vec{n}_{W_1}$, respektive $\vec{n}_{W_2}$, je normálový vektor nadroviny W_1, respektive W_2.

Poznámka 60. *Rozmyslete si, že definice je korektní, tedy že při různých volbách směrových a normálových vektorů vychází stále stejný úhel.*

Poznámka 61. *V prostorech dimenze 2, kde nadrovinami jsou přímky, ověřte, že výpočtem podle všech tří definic vyjde stejný úhel.*

Poznámka 62. *Výše definované úhly nabývají hodnot mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$, což odpovídá v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ faktu, že např. za úhel mezi přímkami považujeme vždy ostrý nebo pravý úhel. Při různých volbách směrových vektorů totiž dostáváme pro úhel mezi nimi vždy φ nebo $\pi - \varphi$ a vybíráme menší z těchto úhlů.*

7.4 Vektorový součin

Definice 43. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem.* **Vektorovým součinem** $\vec{x} \times \vec{y}$ *nazveme vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ splňující:*

1. $\vec{z} \perp \vec{x}$, $\vec{z} \perp \vec{y}$,
2. $\| \vec{z} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2$,
3. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0$, *kde* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Poznámka 63.

1. *Vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$, právě když $(\vec{x}, \vec{y})$ je LZ soubor. Druhá podmínka totiž říká, že nulovou normu má $\vec{x} \times \vec{y}$, právě když nastává rovnost ve Schwarzově-Cauchyově nerovnosti.*
2. *Je-li $(\vec{x}, \vec{y})$ LN soubor, pak je vektorový součin $\vec{x} \times \vec{y}$ určen třemi podmínkami z definice jednoznačně. První určuje přímku, na níž leží. Druhá určuje velikost. Třetí určuje směr.*
3. *Podmínka* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \geq 0$ *odpovídá* **pravotočivému souboru** *vektorů, tj. pokud pravou ruku rotujeme ve směru úhlu od $\vec{x}$ k $\vec{y}$ (uvědomme si, že úhel nabývá hodnot jen od 0 do π), pak palec směřuje do poloprostoru, který obsahuje vektor $\vec{z}$. Toto není triviální pozorování.*

Domácí úkol 7 (1–2 body)**.** *Dokažte 3. bod předchozí poznámky.*

Důsledek 15. *Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$. Označme φ úhel mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$, pak*

$$\| \vec{x} \times \vec{y} \| = \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| \sin \varphi.$$

Důkaz. Podle 2. bodu definice vektorového součinu víme, že

$$\| \vec{x} \times \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2 = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 \left(1 - \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2}{\| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2} \right) = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 \left(1 - \cos^2 \varphi\right) = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 \sin^2 \varphi.$$

Jelikož $0 \leq \varphi \leq \pi$, je $\sin \varphi \geq 0$. Proto odmocněním výše uvedené rovnosti dostáváme tvrzení. □

Poznámka 64. *Číslo $\| \vec{x} \times \vec{y} \|$ tedy v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ odpovídá obsahu rovnoběžníka daného vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$.*

Věta 71 (Výpočet vektorového součinu)**.** *Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je pravotočivá ON báze $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Potom*

$$(\vec{x} \times \vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Označme $\vec{z}$ vektor splňující $(\vec{z})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$. K důkazu, že $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$, je třeba ověřit 3 axiomy vektorového součinu.

1. Podle Věty 63 platí $\langle \vec{x} | \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} | \vec{x}_i \rangle$. Ze znalosti Fourierových koeficientů (souřadnic v ON bázi) dostáváme $\sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \langle \vec{z} | \vec{x}_i \rangle = \alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$. A na závěr rozvojem determinantu podle 3. řádku máme
$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$
Tím je dokázáno, že $\vec{x} \perp \vec{z}$. Podobně se ukáže $\vec{y} \perp \vec{z}$.

2. Opět s využitím Věty 63 a znalosti Fourierových koeficientů odvodíme
$$\| \vec{z} \|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{z} | \vec{x}_i \rangle^2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$
$$\| \vec{x} \|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$
$$\| \vec{y} \|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{y} | \vec{x}_i \rangle^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2,$$
$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \langle \vec{y} | \vec{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i.$$
Roznásobením pak dostaneme kýženou rovnost $\| \vec{z} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 \| \vec{y} \|^2 - \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle^2$.

3. Označme $\mathbb{X}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, a $\mathbb{A}$ matici, jejíž sloupce jsou popořadě vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Pak
$$\mathbb{A} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$
Dle předpokladu věty je $\det \mathbb{X} > 0$. Dále rozvojem determinantu dle 3. sloupce získáme
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \\ \alpha_2 & \beta_2 & \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \\ \alpha_3 & \beta_3 & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 \geq 0.$$

Odtud podle vztahu pro determinant součinu matic plyne $\det \mathbb{A} \geq 0$, což jsme chtěli dokázat.

$\square$

Věta 72 (Vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak*

1. $\vec{y} \times \vec{x} = -(\vec{x} \times \vec{y})$,
2. *vektorový součin je lineární v obou argumentech*

$$(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \alpha(\vec{x} \times \vec{z}) + (\vec{y} \times \vec{z}),$$

$$\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z}).$$

Důkaz.

1. Plyne z Věty 71 a ze změny znaménka při záměně sloupců v determinantu.
2. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathbb{R}^3$. Označme $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$, $(\vec{z})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.

   Podle Věty 71 a s využitím n-linearity determinantů máme

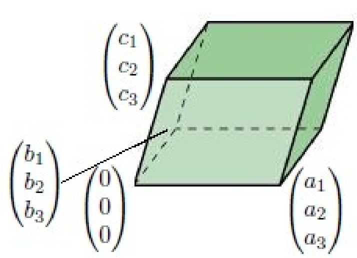
$$((\alpha\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha\alpha_2 + \beta_2 & \alpha\alpha_3 + \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_3 + \beta_3 & \alpha\alpha_1 + \beta_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha\alpha_1 + \beta_1 & \alpha\alpha_2 + \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \alpha(\vec{x}\times\vec{z})_\mathcal{X} + (\vec{y}\times\vec{z})_\mathcal{X}.$$

   Podobně se ukáže linearita ve druhém argumentu.

$\square$

Příklad 31. *Dokažte, že objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ (viz Obrázek 9) je roven*

$$\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$



Obrázek 9: Rovnoběžnostěn.

Řešení: *Objem rovnoběžnostěnu je roven $V = S \cdot v$, kde S je obsah podstavy a v je výška. Obsah podstavy dané vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je podle Poznámky 64 roven $\| \vec{a} \times \vec{b} \|$. Výška je rovna normě OG průmětu $\vec{c}$ na normálu (přímku danou normálovým vektorem) roviny podstavy $P = [\vec{a}, \vec{b}]_\lambda$. Jelikož $\frac{1}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}(\vec{a} \times \vec{b})$ je ON báze $P^\perp$, dostaneme OG průmět podle vzorce v Poznámce 53*

$$\vec{c}_{P^\perp} = \left\langle \vec{c} \,\middle|\, \frac{1}{\| \vec{a} \times \vec{b} \|}(\vec{a} \times \vec{b}) \right\rangle \frac{1}{\| \vec{a} \times \vec{b} \|}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Proto $v = \| \vec{c}_{P^\perp} \| = \frac{|\langle \vec{c} \,|\vec{a}\times\vec{b}\rangle|}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}$. Celkem tedy $V = |\langle \vec{c} \,|\vec{a} \times \vec{b}\rangle|$. Podle Věty 71 platí

$$|\langle \vec{c} \,|\vec{a}\times\vec{b}\rangle| = \left| c_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + c_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|,$$

kde v poslední rovnosti jsme využili rozvoj determinantu dle posledního řádku.

8 Lineární operátory a lineární funkcionály na prostorech se skalárním součinem

V celé kapitole budeme uvažovat těleso $T = \mathbb{C}$ nebo $T = \mathbb{R}$.

8.1 Lineární funkcionály na prostorech se skalárním součinem

Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}$ nad tělesem T a nechť $\vec{y} \in \mathcal{H}$. Definujme pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$. Pak φ je díky linearitě skalárního součinu v 1. argumentu lineární funkcionál. Na otázku, zda lze každý lineární funkcionál na $\mathcal{H}$ zapsat pomocí skalárního součinu, dává na prostorech konečné dimenze odpověď následující věta.

Věta 73 (Rieszova věta)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad T. Nechť $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^{\#}$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz. Dokážeme existenci a jednoznačnost.

- Je-li $\varphi = \Theta$, pak evidentně existuje jediný takový vektor $\vec{y} = \vec{0}$.
- Je-li $\varphi \neq \Theta$, pak $h(\varphi) = 1 = \text{codim ker } \varphi$. Podle Věty 65 máme dim $(\ker\varphi)^{\perp} = 1$. Nechť $\vec{u}$ je bazický vektor $(\ker\varphi)^{\perp}$. Pokud $\vec{y}$ má splňovat $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak speciálně pro $\vec{x} \in \ker\varphi$ platí $0 = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$, tedy $\vec{y} \in (\ker\varphi)^{\perp}$, tj. $\vec{y} = \alpha\vec{u}$ pro nějaké $\alpha \in T$. Najděme α dosazením $\vec{x} = \vec{u}$
$$\varphi(\vec{u}) = \langle \vec{u} | \alpha\vec{u} \rangle = \overline{\alpha} \parallel \vec{u} \parallel^2 .$$
Jediným kandidátem na $\vec{y}$ je proto $\overline{\frac{\varphi(\vec{u})}{\|\vec{u}\|^2}}\vec{u}$. Ověřme, že splňuje $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$. Berme libovolné $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak lze jednoznačně rozložit $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, kde $\vec{a} \in \ker\varphi$ a $\vec{b} \in (\ker\varphi)^{\perp}$, tedy $\vec{b} = \beta\vec{u}$. Odtud máme
$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\beta\vec{u}) = 0 + \beta\varphi(\vec{u}).$$
Zároveň
$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \left\langle \vec{a} + \beta\vec{u} \,\middle|\, \overline{\frac{\varphi(\vec{u})}{\parallel \vec{u} \parallel^2}}\vec{u} \right\rangle = \frac{\varphi(\vec{u})}{\parallel \vec{u} \parallel^2}\langle \vec{a} | \vec{u} \rangle + \frac{\beta\varphi(\vec{u})}{\parallel \vec{u} \parallel^2}\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 + \beta\varphi(\vec{u}).$$

□

8.2 Lineární operátory na prostorech se skalárním součinem

Definice 44. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$*
$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle,$$
pak B nazveme **sdružený operátor** *k A a značíme A^*.*

Jak uvidíme v následující větě, sdružený operátor k A je vždy právě jeden, proto mělo smysl zavést pro něj jediný symbol A^*.

Věta 74 (Existence a jednoznačnost A^*)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad T. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak existuje právě jeden sdružený operátor k A.*

Důkaz.

- Existence: Definujme pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$

$$\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle \quad \text{pro každé } \vec{x} \in \mathcal{H}_n.$$

  Z linearity skalárního součinu v 1. argumentu a linearity A plyne, že $\varphi_{\vec{y}} \in (\mathcal{H}_n)^{\#}$. Podle Rieszovy věty existuje právě jeden vektor $\vec{z}$ splňující $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \langle \vec{x}|\vec{z}\rangle$. Položíme-li $A^*\vec{y} = \vec{z}$, pak A^* bude zobrazení a bude splňovat $\langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|A^*\vec{y}\rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$.

  Zbývá ověřit linearitu A^*. Nechť $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{H}_n$ a $\alpha \in T$, pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ plyne z antilinearity skalárního součinu v 2. argumentu

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x}|\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2\rangle &= \overline{\alpha}\langle A\vec{x}|\vec{y}_1\rangle + \langle A\vec{x}|\vec{y}_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle \vec{x}|A^*\vec{y}_1\rangle + \langle \vec{x}|A^*\vec{y}_2\rangle \\ &= \langle \vec{x}|\alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2\rangle. \end{aligned}$$

  Zároveň $\langle A\vec{x}|\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2\rangle = \langle \vec{x}|A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2)\rangle$. Odečtením rovností dostáváme

$$\langle \vec{x}|\alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 - A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2)\rangle = 0.$$

  Odkud po dosazení $\vec{x} = \alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 - A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2)$ plyne z vlastnosti pozitivní definitnosti skalárního součinu

$$\alpha A^*\vec{y}_1 + A^*\vec{y}_2 - A^*(\alpha\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{0}.$$

- Jednoznačnost: Nechť $B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a nechť pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí $\langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|B\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|C\vec{y}\rangle$. Pak odečtením vznikne

$$\langle \vec{x}|B\vec{y} - C\vec{y}\rangle.$$

  Dosazením $\vec{x} = B\vec{y} - C\vec{y}$ dostaneme $B\vec{y} = C\vec{y}$ pro každé $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$, tedy $B = C$.

□

Věta 75 (Vlastnosti A^*)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad T. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, $\alpha \in T$. Pak platí*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$,
3. $(AB)^* = B^* A^*$,
4. $(A^*)^* = A$,
5. $I^* = I$,
6. $\Theta^* = \Theta$,
7. *je-li A regulární, potom A^* je regulární a platí* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Důkaz.

1. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak

$$\langle (A+B)\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}+B\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle B\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|A^*\vec{y}\rangle + \langle \vec{x}|B^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|A^*\vec{y}+B^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|(A^*+B^*)\vec{y}\rangle.$$

   Jelikož sdružený operátor je jediný, je tímto dokázána rovnost $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak

$$\langle (\alpha A)\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle \alpha(A\vec{x})|\vec{y}\rangle = \alpha\langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle = \alpha\langle \vec{x}|A^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\overline{\alpha}(A^*\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}|(\overline{\alpha}A^*)\vec{y}\rangle.$$

3. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak
$$\langle (AB)\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle A(B\vec{x})|\vec{y}\rangle = \langle B\vec{x}|A^*\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|B^*(A^*\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}|(B^*A^*)\vec{y}\rangle.$$
4. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak
$$\langle A^*\vec{x}|\vec{y}\rangle = \overline{\langle \vec{y}|A^*\vec{x}\rangle} = \overline{\langle A\vec{y}|\vec{x}\rangle} = \langle \vec{x}|A\vec{y}\rangle.$$
5. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak
$$\langle I\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|I\vec{y}\rangle.$$
6. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$, pak
$$\langle \Theta\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0 = \langle \vec{x}|\Theta\vec{y}\rangle.$$
7. Použitím již dokázaného 3. a 5. bodu máme $A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$, odkud již plyne $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, tedy i regularita A^*.

□

8.3 Normální operátory a normální matice

8.3.1 Nad tělesem $\mathbb{C}$

Definice 45. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud*

1. *$AA^* = A^*A$, pak A nazveme* **normální***,*
2. *$A = A^*$, pak A nazveme* **hermitovský***,*
3. *$AA^* = I$, pak A nazveme* **unitární***.*

Příklady takových operátorů uvedeme až poté, co objasníme, jak vypadají matice těchto operátorů v bázích.

Poznámka 65. *Každý hermitovský operátor je normální a každý unitární operátor je normální.*

Věta 76 (Sdružený operátor a hermitovsky sdružená matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak*
$$^{\mathcal{X}}(A^*) = (^{\mathcal{X}}A)^H.$$

Důkaz. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. S využitím ortonormality báze (i-tá souřadnice je rovna i-tému Fourierovu koeficientu) a vlastností skalárního součinu dostáváme pro libovolné $i, j \in \widehat{n}$
$$[^{\mathcal{X}}(A^*)]_{ij} = \vec{x}_i^{\#}(A^*\vec{x}_j) = \langle A^*\vec{x}_j|\vec{x}_i\rangle = \langle \vec{x}_j|A\vec{x}_i\rangle = \overline{\langle A\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle} = \overline{\vec{x}_j^{\#}(A\vec{x}_i)} = \overline{[^{\mathcal{X}}A]_{ji}} = [(^{\mathcal{X}}A)^H]_{ij}.$$

□

Definice 46. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pokud*

1. *$\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **normální***,*
2. *$\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **hermitovská***,*
3. *$\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **unitární***.*

Věta 77 (Normální operátory a normální matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$.*

- *A je normální operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.*
- *A je hermitovský operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je hermitovská matice.*

- *A je unitární operátor, právě když ${}^{\mathcal{X}}A$ je unitární matice.*

Důkaz. A je normální operátor $\Leftrightarrow AA^* = A^*A \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(AA^*) ={}^{\mathcal{X}} (A^*A) \Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{X}}A^*) = ({}^{\mathcal{X}}A^*)({}^{\mathcal{X}}A)$ $\Leftrightarrow ({}^{\mathcal{X}}A)\left(({}^{\mathcal{X}}A)^H\right) = \left(({}^{\mathcal{X}}A)^H\right)({}^{\mathcal{X}}A) \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice. V předposlední ekvivalenci jsme využili Větu 76.

Důkazy pro hermitovskost a unitaritu jsou analogické. □

Příklad 32. *Uveďme příklady normálních operátorů na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$. Standardní bázi značíme jako vždy $\mathcal{E}$.*

1. *Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,*

$$
{}^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ pro } \varphi \in \mathbb{R},
$$

   pak A, B jsou unitární operátory. (Uvědomte si, že pro kontrolu unitarity matice stačí hlídat, že sloupce tvoří ON soubor při standardním skalárním součinu.)

2. *Nechť $C, D \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,*

$$
{}^{\mathcal{E}}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathcal{E}}D = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix},
$$

   pak C, D jsou hermitovské operátory.

Zmiňme některé vlastnosti normálních operátorů. K jejich charakterizaci potřebujeme následující lemma.

Lemma 8. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský. Jestliže $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$
0 = \langle A(\vec{x}+\vec{y})|(\vec{x}+\vec{y})\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle + \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle A\vec{y}|\vec{x}\rangle + \langle A\vec{y}|\vec{y}\rangle = 0 + \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle + \langle \vec{y}|A\vec{x}\rangle + 0,
$$

kde jsme v poslední rovnosti využili hermitovskosti. Celkem máme

$$
0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle.
$$

Dosadíme $\vec{y} = A\vec{x}$, pak

$$
0 = 2\mathrm{Re}\langle A\vec{x}|A\vec{x}\rangle = 2 \parallel A\vec{x} \parallel^2,
$$

proto $A\vec{x} = \vec{0}$.

□

Věta 78 (Charakterizace normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\parallel A\vec{x} \parallel = \parallel A^*\vec{x} \parallel$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Je-li A normální, pak

$$
\langle A\vec{x}|A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}|A^*A\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}|AA^*\vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x}|A^*\vec{x}\rangle.
$$

($\Leftarrow$): Ukažme nejprve s využitím Věty 75, že $AA^* - A^*A$ je hermitovský operátor

$$
(AA^* - A^*A)^* = A^{**}A^* - A^*A^{**} = AA^* - A^*A.
$$

Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$
\langle (AA^* - A^*A)\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle AA^*\vec{x}|\vec{x}\rangle - \langle A^*A\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle A^*\vec{x}|A^*\vec{x}\rangle - \langle A\vec{x}|A\vec{x}\rangle = 0.
$$

Podle Lemmatu 8 je $AA^* - A^*A = \Theta$, tedy A je normální. □

Věta 79 (Vlastnosti normálních operátorů). *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je normální. Pak platí:*

1. $\lambda \in \sigma(A) \ \Leftrightarrow\ \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$,

2. *$\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu λ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný valstnímu číslu $\overline{\lambda}$,*

3. *vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Důkaz.

1. Snadno nahlédneme, že $A - tI$ je normální operátor pro každé $t \in \mathbb{C}$. Podle Věty 78 dostaneme

$$\| (A - tI)\vec{x} \| = \| (A^* - \overline{t}I)\vec{x} \|,$$

čímž je ekvivalence dokázaná.

2. Plyne bezprostředně z důkazu 1. bodu.

3. Nechť $\lambda, \nu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \nu$. Nechť $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ a $\vec{y}$ je vlastní vektor A příslušný ν. Pak platí

$$\lambda\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\lambda\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|A^*\vec{y}\rangle = \langle\vec{x}|\overline{\nu}\vec{y}\rangle = \nu\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle.$$

Odtud plyne $(\lambda - \nu)\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$ a z různosti λ a ν pak dostaneme $\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = 0$.

□

Význam normálních operátorů nám objasní jejich spektrální vlastnosti.

Věta 80 (Diagonalizovatelnost normálních operátorů). *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální, pak A je diagonalizovatelný.*

Důkaz. Jelikož těleso je rovno $\mathbb{C}$, platí automaticky $\sigma(A) = p_A^{-1}(0)$. Stačí tedy ověřit $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$. Berme libovolné $\lambda \in \sigma(A)$. Označme $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathcal{H}_n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$. Ukažme, že $A(P_\lambda^\perp) \subset P_\lambda^\perp$. Je-li $\vec{y} \in A(P_\lambda^\perp)$, pak $\vec{y} = A\vec{x}$ pro nějaké $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Pak pro každé $\vec{z} \in P_\lambda$ platí

$$\langle\vec{y}|\vec{z}\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}|A^*\vec{z}\rangle.$$

S využitím Věty 79 máme

$$\langle\vec{x}|A^*\vec{z}\rangle = \langle\vec{x}|\overline{\lambda}\vec{z}\rangle = \lambda\langle\vec{x}|\vec{z}\rangle = 0.$$

Označme $k = \nu_g(\lambda)$, $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ bázi P_λ a $\widehat{\mathcal{X}} = (\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi $P_\lambda^\perp$. Pak $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathcal{H}_n$, v níž má A blokově diagonální tvar

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & {}^{\widehat{\mathcal{X}}}B \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{I}_k$ je jednotková matice řádu k a B je zúžení operátoru A na $P_\lambda^\perp$, neboli $B \in \mathcal{L}(P_\lambda^\perp)$ je definovaný jako $B\vec{x} = A\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Pak

$$p_A(t) = (\lambda - t)^k p_B(t).$$

Ukažme, že $p_B(\lambda) \neq 0$. Kdyby $p_B(\lambda) = 0$, pak $\lambda \in \sigma(B)$, tj. existuje $\vec{x} \in P_\lambda^\perp, \vec{x} \neq \vec{0}$ takový, že $\lambda\vec{x} = B\vec{x} = A\vec{x}$. Dostáváme proto, že zároveň platí $\vec{x} \in P_\lambda$. Protože $P_\lambda \cap P_\lambda^\perp = \{\vec{0}\}$, máme spor s $\vec{x} \neq \vec{0}$. □

Poznámka 66. *Opačná implikace ve Větě 80 neplatí. Například na unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ pro operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, platí, že je diagonalizovatelný, ale není normální.*

Následující spektrální vlastnost dokonce charakterizuje normální operátory.

Věta 81 (Normální operátory a ON báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Z Věty 80 plyne, že pro normální operátor existuje báze prostoru $\mathcal{H}_n$ z vlastních vektorů. Z ní vyrobíme OG bázi z vlastních vektorů tak, že soubory bazických vektorů příslušných stejnému vlastnímu číslu ortogonalizujeme Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé podle Věty 79. Na závěr každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž získáme hledanou ON bázi z vlastních vektorů.
($\Leftarrow$): Nechť $\mathcal{X}$ je báze z vlastních vektorů. Pak ${}^{\mathcal{X}}A = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální matice. Jak se čtenář snadno přesvědčí, platí $\mathbb{D}\mathbb{D}^H = \mathbb{D}^H\mathbb{D}$. Je-li $\mathcal{X}$ navíc ON, pak podle Věty 77 je A normální operátor. $\square$

Věta 82 (Charakterizace unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

1. *A je unitární.*
2. *$A^{-1} = A^*$.*
3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí*
$$\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle.$$
Slovy:„Unitární operátor zachovává skalární součin.“
4. *Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí*
$$\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \| .$$
Slovy:„Unitární operátor zachovává normu.“

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.
1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne přímo z definice.
2. $\Rightarrow$ 3.: Pokud $A^{-1} = A^*$, pak $\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|A^*A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$.
3. $\Rightarrow$ 4.: Triviální.
4. $\Rightarrow$ 1.: Uvědomme si, že $AA^* - I$ je hermitovský operátor. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí
$$\langle (A^*A - I)\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle A^*A\vec{x}|\vec{x}\rangle - \langle \vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle A\vec{x}|A\vec{x}\rangle - \langle \vec{x}|\vec{x}\rangle = 0.$$
Podle Lemmatu 8 máme $AA^* - I = \Theta$. $\square$

Věta 83 (Vlastnosti unitárních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A, B jsou unitární. Pak*

1. *pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí $|\lambda| = 1$,*
2. *$|\det A| = 1$,*
3. *AB je unitární.*

Důkaz.

1. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak platí podle 4. bodu Věty 82
$$\| \vec{x} \| = \| A\vec{x} \| = \| \lambda\vec{x} \| = |\lambda| \, \| \vec{x} \| .$$
Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, máme $|\lambda| = 1$.

2. Uvažujme $\mathcal{X}$ ON bázi $\mathcal{H}_n$, pak $\det AA^* = \det({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{X}}(A^*)) = \det({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{X}}A)^H = \det({}^{\mathcal{X}}A)\overline{\det({}^{\mathcal{X}}A)^T} = |\det({}^{\mathcal{X}}A)|^2$. Zároveň $\det AA^* = \det I = 1$. Celkově máme $1 = |\det({}^{\mathcal{X}}A)| = |\det A|$.
(Díky faktu, že $p_A(0)^{-1} = \sigma(A)$, je jinou možností důkazu použít argument, že determinant operátoru je součinem vlastních čísel.)

3. Zkontrolujme unitaritu užitím Věty 75

$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = AIA^* = I.$$

□

Věta 84 (Vlastnosti hermitovských operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský. Pak*

1. *pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}$,*

2. *$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,*

3. *$\det A \in \mathbb{R}$.*

Důkaz.

1. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}|A^*\vec{x}\rangle = \langle \vec{x}|A\vec{x}\rangle = \overline{\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle},$$

tedy $\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle \in \mathbb{R}$.

2. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak platí

$$\langle A\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle \lambda\vec{x}|\vec{x}\rangle = \lambda \parallel \vec{x} \parallel^2 .$$

Podle předchozího bodu je $\lambda \parallel \vec{x} \parallel^2 \in \mathbb{R}$ a podle nenulovosti $\vec{x}$ je $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Uvažujme $\mathcal{X}$ ON bázi $\mathcal{H}_n$, pak

$$\det A = \det({}^{\mathcal{X}}A) \quad \text{a} \quad \det A^* = \det({}^{\mathcal{X}}A^*) = \det({}^{\mathcal{X}}A)^H = \overline{\det({}^{\mathcal{X}}A)^T} = \overline{\det({}^{\mathcal{X}}A)}.$$

Jelikož $A = A^*$, dostáváme $\det A = \overline{\det A}$, tedy $\det A \in \mathbb{R}$.
(Díky faktu, že $p_A(0)^{-1} = \sigma(A)$, je jinou možností důkazu použít argument, že determinant operátoru je součinem vlastních čísel.)

□

8.3.2 Nad tělesem $\mathbb{R}$

V této kapitole zopakujeme, případně přeformulujeme, co se změní pro operátory nad reálným tělesem. Není zde ale nic, co by si čtenář neodvodil na základě znalostí lineárních operátorů na prostorech se skalárním součinem sám.

Definice 47. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud*

1. *$AA^* = A^*A$, pak A nazveme* **normální***,*

2. *$A = A^*$, pak A nazveme* **symetrický***,*

3. *$AA^* = I$, pak A nazveme* **ortogonální***.*

Příklady takových operátorů uvedeme opět až poté, co objasníme, jak vypadají matice těchto operátorů v bázích.

Poznámka 67. *Každý symetrický operátor je normální a každý ortogonální operátor je normální.*

Věta 85 (Sdružený operátor a transponovaná matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak*

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = (^{\mathcal{X}}A)^T.$$

Důkaz. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$. S využitím ortonormality báze (i-tá souřadnice je rovna i-tému Fourierovu koeficientu) a vlastností skalárního součinu dostáváme pro libovolné $i, j \in \widehat{n}$

$$[^{\mathcal{X}}(A^*)]_{ij} = \vec{x}_i^{\#}(A^*\vec{x}_j) = \langle A^*\vec{x}_j | \vec{x}_i \rangle = \langle \vec{x}_j | A\vec{x}_i \rangle = \langle A\vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \vec{x}_j^{\#}(A\vec{x}_i) = [^{\mathcal{X}}A]_{ji} = [(^{\mathcal{X}}A)^T]_{ij}.$$

$\square$

Definice 48. *Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pokud*

1. *$\mathbb{A}$ je reálná a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **symetrická***,*
2. *$\mathbb{A}$ je reálná a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ nazveme* **ortogonální***.*

Věta 86 (Normální operátory a normální matice)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$.*

- *A je normální operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.*
- *A je symetrický operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je symetrická matice.*
- *A je ortogonální operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je ortogonální matice.*

Důkaz. A je normální operátor $\Leftrightarrow AA^* = A^*A \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}(AA^*) = {}^{\mathcal{X}}(A^*A) \Leftrightarrow (^{\mathcal{X}}A)(^{\mathcal{X}}A^*) = (^{\mathcal{X}}A^*)(^{\mathcal{X}}A)$ $\Leftrightarrow (^{\mathcal{X}}A)\big((^{\mathcal{X}}A)^T\big) = \big((^{\mathcal{X}}A)^T\big)(^{\mathcal{X}}A) \Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice. V předposlední ekvivalenci jsme využili Větu 85.

Důkazy pro symetrii a ortogonalitu jsou analogické. $\square$

Příklad 33. *Uveďme příklady normálních operátorů na eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$. Standardní bázi značíme jako vždy $\mathcal{E}$.*

1. *Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$,*

$$^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ pro } \varphi \in \mathbb{R},$$

pak A, B jsou ortogonální operátory. (Uvědomte si, že pro kontrolu ortogonality matice stačí hlídat, že sloupce tvoří ON soubor při standardním skalárním součinu.)

2. *Nechť $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$,*

$$^{\mathcal{E}}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

pak C je symetrický operátor.

Zmiňme některé vlastnosti normálních operátorů. K jejich charakterizaci potřebujeme následující lemma.

Lemma 9. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je symetrický. Jestliže $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$0 = \langle A(\vec{x} + \vec{y}) | (\vec{x} + \vec{y}) \rangle = \langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle + \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle A\vec{y} | \vec{x} \rangle + \langle A\vec{y} | \vec{y} \rangle = 0 + \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} | A\vec{x} \rangle + 0,$$

kde jsme v poslední rovnosti využili symetrie. Celkem máme

$$0 = 2\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle.$$

Dosadíme $\vec{y} = A\vec{x}$, pak

$$0 = 2\langle A\vec{x} | A\vec{x} \rangle = 2 \parallel A\vec{x} \parallel^2,$$

proto $A\vec{x} = \vec{0}$. □

Věta 87 (Charakterizace normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\parallel A\vec{x} \parallel = \parallel A^*\vec{x} \parallel$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Je-li A normální, pak

$$\langle A\vec{x} | A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | A^*A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x} | AA^*\vec{x} \rangle = \langle A^*\vec{x} | A^*\vec{x} \rangle.$$

($\Leftarrow$): Ukažme nejprve s využitím Věty 75, že $AA^* - A^*A$ je symetrický operátor

$$(AA^* - A^*A)^* = A^{**}A^* - A^*A^{**} = AA^* - A^*A.$$

Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$\langle (AA^* - A^*A)\vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle AA^*\vec{x} | \vec{x} \rangle - \langle A^*A\vec{x} | \vec{x} \rangle = \langle A^*\vec{x} | A^*\vec{x} \rangle - \langle A\vec{x} | A\vec{x} \rangle = 0.$$

Podle Lemmatu 9 je $AA^* - A^*A = \Theta$, tedy A je normální. □

Věta 88 (Vlastnosti normálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je normální. Pak platí:*

1. $\lambda \in \sigma(A) \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \sigma(A^*)$,
2. *$\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný vlastnímu číslu λ $\Leftrightarrow$ $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný valstnímu číslu λ,*
3. *vlastní vektory příslušné vzájemně různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Důkaz.

1. Snadno nahlédneme, že $A - tI$ je normální operátor pro každé $t \in \mathbb{R}$. Podle Věty 87 dostaneme

   $$\parallel (A - tI)\vec{x} \parallel = \parallel (A^* - tI)\vec{x} \parallel,$$

   čímž je ekvivalence dokázaná. (Uvažujeme pouze reálná t, protože $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.)
2. Plyne z důkazu 1. bodu.
3. Nechť $\lambda, \nu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \nu$. Nechť $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ a $\vec{y}$ je vlastní vektor A příslušný ν. Pak platí

   $$\lambda\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \lambda\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | A^*\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \nu\vec{y} \rangle = \nu\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle.$$

   Odtud plyne $(\lambda - \nu)\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$ a z různosti λ a ν pak dostaneme $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$.

□

Popišme opět spektrální vlastnosti normálních operátorů nad $\mathbb{R}$.

Věta 89 (ν_a a ν_g pro normální operátory)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$ a $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální, pak pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Důkaz. Berme libovolné $\lambda \in \sigma(A)$. Označme $P_\lambda = \{\vec{x} \in \mathcal{H}_n \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$. Ukažme, že $A(P_\lambda^\perp) \subset P_\lambda^\perp$. Je-li $\vec{y} \in A(P_\lambda^\perp)$, pak $\vec{y} = A\vec{x}$ pro nějaké $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Pak pro každé $\vec{z} \in P_\lambda$ platí

$$\langle \vec{y}|\vec{z}\rangle = \langle A\vec{x}|\vec{z}\rangle = \langle \vec{x}|A^*\vec{z}\rangle.$$

S využitím Věty 88 máme

$$\langle \vec{x}|A^*\vec{z}\rangle = \langle \vec{x}|\lambda\vec{z}\rangle = \lambda\langle \vec{x}|\vec{z}\rangle = 0.$$

Označme $k = \nu_g(\lambda)$, $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ bázi P_λ a $\widehat{\mathcal{X}} = (\vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_n)$ bázi $P_\lambda^\perp$. Pak $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze $\mathcal{H}_n$, v níž má A blokově diagonální tvar

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{I}_k & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & ^{\widehat{\mathcal{X}}}B \end{pmatrix},$$

kde $\mathbb{I}_k$ je jednotková matice řádu k a B je zúžení operátoru A na $P_\lambda^\perp$, neboli $B \in \mathcal{L}(P_\lambda^\perp)$ je definovaný jako $B\vec{x} = A\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in P_\lambda^\perp$. Pak

$$p_A(t) = (\lambda - t)^k p_B(t).$$

Ukažme, že $p_B(\lambda) \neq 0$. Kdyby $p_B(\lambda) = 0$, pak $\lambda \in \sigma(B)$, tj. existuje $\vec{x} \in P_\lambda^\perp, \vec{x} \neq \vec{0}$ takový, že $\lambda\vec{x} = B\vec{x} = A\vec{x}$. Dostáváme proto, že zároveň platí $\vec{x} \in P_\lambda$. Protože $P_\lambda \cap P_\lambda^\perp = \{\vec{0}\}$, máme spor s $\vec{x} \neq \vec{0}$. ☐

Poznámka 68. *Opačná implikace ve Větě 89 neplatí. Například na eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ pro operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, kde $^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, platí, že je diagonalizovatelný, ale není normální.*

Následující spektrální vlastnost charakterizuje normální operátory, pokud jsou kořeny charakteristického polynomu z tělesa.

Věta 90 (Normální operátory a ON báze z vlastních vektorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. A je normální a $\underline{p_A^{-1}(0) \subset \mathbb{R}}$, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Z Věty 89 plyne pro normální operátor A, že za předpokladu $p_A^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný, tedy existuje báze prostoru $\mathcal{H}_n$ z vlastních vektorů. Z ní vyrobíme OG bázi z vlastních vektorů tak, že soubory bazických vektorů příslušných stejnému vlastnímu číslu ortogonalizujeme Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé podle Věty 88. Na závěr každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy, čímž získáme hledanou ON bázi z vlastních vektorů.
($\Leftarrow$): Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze z vlastních vektorů. Pak $^{\mathcal{X}}A = \mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je reálná diagonální matice. Jak se čtenář snadno přesvědčí, platí $\mathbb{D}\mathbb{D}^T = \mathbb{D}^T\mathbb{D}$. Podle Věty 86 je A normální. ☐

Věta 91 (Charakterizace ortogonálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

1. *A je ortogonální.*
2. *$A^{-1} = A^*$.*
3. *Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ platí*
$$\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle.$$
Slovy: „Ortogonální operátor zachovává skalární součin."

4. Pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$\| A\vec{x} \| = \| \vec{x} \| .$$

Slovy: „Ortogonální operátor zachovává normu."

Důkaz. Stačí dokázat cyklus implikací.
1. $\Rightarrow$ 2.: Plyne přímo z definice.
2. $\Rightarrow$ 3.: Pokud $A^{-1} = A^*$, pak $\langle A\vec{x}|A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|A^*A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$.
3. $\Rightarrow$ 4.: Triviální.
4. $\Rightarrow$ 1.: Uvědomme si, že $AA^* - I$ je symetrický operátor. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí

$$\langle (A^*A - I)\vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle A^*A\vec{x}|\vec{x}\rangle - \langle \vec{x}|\vec{x}\rangle = \langle A\vec{x}|A\vec{x}\rangle - \langle \vec{x}|\vec{x}\rangle = 0.$$

Podle Lemmatu 9 máme $AA^* - I = \Theta$. □

Věta 92 (Vlastnosti ortogonálních operátorů)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A, B jsou ortogonální. Pak*

1. *pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí $\lambda = \pm 1$,*
2. $\det A = \pm 1$,
3. *AB je ortogonální.*

Důkaz.

1. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ. Pak platí podle 4. bodu Věty 91

$$\| \vec{x} \| = \| A\vec{x} \| = \| \lambda\vec{x} \| = |\lambda| \, \| \vec{x} \| .$$

   Jelikož $\vec{x} \neq \vec{0}$, máme $|\lambda| = 1$. Protože $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, platí $\lambda = \pm 1$.

2. Uvažujme $\mathcal{X}$ ON bázi $\mathcal{H}_n$, pak $\det AA^* = \det ({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{X}}(A^*)) = \det ({}^{\mathcal{X}}A)({}^{\mathcal{X}}A)^T = \det ({}^{\mathcal{X}}A) \det ({}^{\mathcal{X}}A)^T = (\det ({}^{\mathcal{X}}A))^2$. Zároveň $\det AA^* = \det I = 1$. Celkově máme $\pm 1 = \det A$.

3. Zkontrolujme ortogonalitu užitím Věty 75.

$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = AIA^* = I.$$

□

Věta 93 (Vlastnost symetrického operátoru)**.** *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad $\mathbb{R}$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je symetrický. Pak A je diagonalizovatelný.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak matice ${}^{\mathcal{X}}A$ je symetrická, tedy i hermitovská. Definujeme-li operátor $B\vec{x} = {}^{\mathcal{X}}A \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, pak B je hermitovský operátor, tedy $\sigma(B) = p_B^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$. Zároveň $p_B^{-1}(0) = p_{{}^{\mathcal{X}}A}^{-1}(0) = p_A^{-1}(0)$, tedy $p_A^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$. Podle Věty 89 víme, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, proto A je diagonalizovatelný. □

Poznámka 69. *Zatímco nad $\mathbb{C}$ je každý normální operátor diagonalizovatelný, nad $\mathbb{R}$ nemusí platit, že kořeny charakteristického polynomu jsou reálné. (Pokud je ale A symetrický operátor, diagonalizovatelný je.)*

1. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde $\mathbb{C}^2$ je unitární prostor, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pak A je unitární, tedy normální, a proto je diagonalizovatelný. Skutečně ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix})$.*
2. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, kde $\mathbb{R}^2$ je eukleidovský, ${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pak A je ortogonální, tedy normální, ale není diagonalizovatelný, protože $p_A^{-1}(0) = \{-i, i\} \not\subset \mathbb{R}$.*

Sami si rozmyslete (zanedlouho to dopíšu do poznámek):

1. Jak všechna tvrzení této kapitoly vypadají přeformulovaná pro normální matice.

8.4 Kritéria pro pozitivní definitnost kvadratických forem

Cílem této kapitoly je představit kritéria, která umožní rozhodnout o pozitivní definitnosti kvadratických forem bez Lagrangeovy úpravy kvadratické formy na čtverce. Konkrétně uvedeme kritéria dvě: spektrální a Sylvesterovo kritérium.

Lemma 10. *Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T a nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť ${}^{\mathcal{X}}Q$ má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (kde se hodnoty mohou opakovat – každé vlastní číslo je ve výčtu tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost). Pak existuje polární báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že pro každé $\vec{x} \in V_n$*

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \lambda_2|\alpha_2|^2 + \dots + \lambda_n|\alpha_n|^2,$$

kde $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, *tj.* ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Důkaz. Matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ je podle Věty 53 hermitovská, proto platí:

1. $\sigma({}^{\mathcal{X}}Q) \subset \mathbb{R}$,
2. ${}^{\mathcal{X}}Q$ je normální matice, proto existuje ON báze $\mathcal{U}$ unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$ složená z vlastních vektorů ${}^{\mathcal{X}}Q$ (příslušných popořadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).

Označíme-li $\mathbb{U}$ matici, jejíž sloupce jsou vektory z báze $\mathcal{U}$, pak je $\mathbb{U}$ unitární matice, tedy $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^H$. Proto platí

$$ {}^{\mathcal{X}}Q = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^H. $$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) = \left((\vec{x})_{\mathcal{X}}\right)^T \, {}^{\mathcal{X}}Q \, \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}} &= \left((\vec{x})_{\mathcal{X}}\right)^T \mathbb{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbb{U}^H \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}} \\ &= \left(\mathbb{U}^T (\vec{x})_{\mathcal{X}}\right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \overline{\left(\mathbb{U}^T (\vec{x})_{\mathcal{X}}\right)}. \end{aligned}$$

Zkonstruujeme-li bázi $\mathcal{A}$ ze vztahu ${}^{\mathcal{A}}I^{\mathcal{X}} = \overline{\mathbb{U}}$, pak $\overline{\mathbb{U}}(\vec{x})_{\mathcal{A}} = (\vec{x})_{\mathcal{X}}$, tj. $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \mathbb{U}^T(\vec{x})_{\mathcal{X}}$ (protože $\overline{\mathbb{U}}\mathbb{U}^T = \overline{\mathbb{U}\mathbb{U}^H} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{I}$). Máme tedy

$$Q(\vec{x}) = \left((\vec{x})_{\mathcal{A}}\right)^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \overline{(\vec{x})_{\mathcal{A}}} = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \lambda_2|\alpha_2|^2 + \dots + \lambda_n|\alpha_n|^2, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

Věta 94 (Spektrální kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T a nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak Q je pozitivně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechna vlastní čísla kladná.*

Důkaz. Podle Lemmatu 10 existuje báze $\mathcal{A}$ taková, že Q má v bázi $\mathcal{A}$ tvar

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \lambda_2|\alpha_2|^2 + \cdots + \lambda_n|\alpha_n|^2,$$

kde $\sigma({}^{\mathcal{X}}Q) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Odtud plyne, že

$$Q(\vec{x}) > 0 \text{ pro každé } \vec{x} \in V_n, \vec{x} \neq \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \lambda_1|\alpha_1|^2 + \lambda_2|\alpha_2|^2 + \cdots + \lambda_n|\alpha_n|^2 > 0 \text{ pro každé } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in T^n$$

$\Leftrightarrow\;\; \lambda_k > 0$ pro každé $k \in \widehat{n}$. □

Lemma 11 (Jacobi)**.** *Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T a nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V_n. Nechť matice ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty nenulové, tj. pro každé $k \in \widehat{n}$*

$$\Delta_k = \det {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje polární báze $\mathcal{A}$ prostoru V_n taková, že pro každé $\vec{x} \in V_n$

$$Q(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_1}|\alpha_1|^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}|\alpha_2|^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}|\alpha_n|^2,$$

kde $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, *tj.* ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$.

Důkaz. Definujme soubor $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ vztahy

$$\vec{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k)} \vec{x}_j,$$

kde čísla $\overline{\alpha_j^{(k)}}$ řeší soustavu LAR

$${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1^{(k)}} \\ \overline{\alpha_2^{(k)}} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_k^{(k)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak snadno nahlédneme, že $\mathcal{A}$ je LN soubor.

Nechť $j \leq k$ a h je polára Q, pak

$$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = h(\vec{a}_k, \sum_{i=1}^{j} \alpha_i^{(j)} \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^{(j)}} h(\vec{a}_k, \vec{x}_i).$$

Protože pro $i \leq k$ platí díky volbě čísel $\alpha_\ell^{(k)}$

$$h(\vec{a}_k, \vec{x}_i) = h(\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell^{(k)} \vec{x}_\ell, \vec{x}_i) = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell^{(k)} h(\vec{x}_\ell, \vec{x}_i) = \overline{\sum_{\ell=1}^{k} \overline{\alpha_\ell^{(k)}} [{}^{\mathcal{X}}Q]_{i\ell}} = \delta_{ik},$$

máme celkově

$$h(\vec{a}_k, \vec{a}_j) = \sum_{i=1}^{j} \overline{\alpha_i^{(j)}} \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j < k, \\ \overline{\alpha_k^{(k)}} & \text{pro } j = k, \end{cases}$$

tudíž $\mathcal{A}$ je polární báze.

Zbývá ověřit, že $Q(\vec{a}_1) = \frac{1}{\Delta_1}$ a $Q(\vec{a}_j) = \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j}$ pro $j > 1$. První vztah plyne přímo z definice čísla $\alpha_1^{(1)}$

$$Q(\vec{a}_1) = h(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = \overline{\alpha_1^{(1)}} = \frac{1}{\Delta_1}.$$

Pro $j > 1$ dostaneme rovnosti pro $Q(\vec{a}_j)$ aplikací Cramerova pravidla. □

Věta 95 (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť Q je kvadratická forma ve V_n nad T a nechť $\mathcal{X}$ je báze V_n. Pak Q je pozitivně definitní, právě když ${}^{\mathcal{X}}Q$ má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj. pro každé $k \in \widehat{n}$*

$$\Delta_k = \det {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} > 0.$$

Důkaz. Implikace ($\Leftarrow$) je důsledkem Lemmatu 11.
($\Rightarrow$): Je-li Q PD, pak pro každé $k \in \widehat{n}$ je kvadratická forma $Q^{(k)}$ definovaná pro každé $\vec{y} \in T^k$ jako

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = \vec{y}^T \ {}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix} \ \overline{\vec{y}}$$

také PD. Platí totiž

$$Q^{(k)}(\vec{y}) = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Q(\vec{x}), \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z PD $Q^{(k)}$ plyne podle Věty 94, že vlastní čísla ${}^{\mathcal{X}}Q \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & k \\ 1, & 2, & \dots, & k \end{pmatrix}$ jsou kladná, z čehož dostáváme, že také $\Delta_k > 0$. □

Reference

[1] Emil Humhal, *Algebra 2*, http://tjn.fjfi.cvut.cz/∼humhal/

[2] Jiří Pytlíček, *Lineární algebra a geometrie*, vydavatelství ČVUT, Praha, 2005

[3] Jean-Luc Dorier, *Contribution a l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique*, thèse, 1990

[4] Jindřich Bečvář, *Z historie lineární algebry*, Dějiny matematiky **35**, Matfyzpress, 2007