Cvičení LAA8

Skalární součin

1. V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$, kde kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Je to skalární součin?

2. V $\mathcal{P}$ definujeme $\langle x|y\rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$. Je to skalární součin?

3. V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$. Najděte všechny vektory kolmé na $\vec{e}_1$.

4. V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dva různé úplné soubory (ON báze).

5. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\lambda$.

   Najděte ON bázi P. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ doplňte soubor $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$ na ON bázi. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

7. Nechť $P = [\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$. Najděte OG bázi obsahující vektor z $[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}]_\lambda$, je-li dán skalární součin $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \mathbb{A}_{ij}\mathbb{B}_{ij}$.

8. Najděte OG bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, kde $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, je-li v $\mathbb{R}^3$ definován skalární součin ve standardní bázi
$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$
tak, aby báze obsahovala vektor z $Q \equiv x - y - z = 0$.

9. Nechť $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Najděte $P^\perp$.

   Najděte dvěma různými způsoby OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

10. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$
Najděte ON bázi $P^\perp$, je-li $P \equiv x = 0$.

11. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte $Q^\perp$ do P, je-li $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}]_\lambda$.