Cvičení LAA7

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^2$.

2. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{C}^2$.

3. Nechť $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}$ platí
$$h(x,y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$
Dokažte, že h je hermitovská forma.

4. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = {(\vec{x})_{\mathcal{X}}}^T \ \mathbb{A} \ \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

5. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = {(\vec{x})_{\mathcal{X}}}^T \ \mathbb{A} \ (\vec{y})_{\mathcal{X}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

6. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Najděte její polární bázi. Pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujeme
   (a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
   (b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,
   (c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
   (d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
   (e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

7. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte signaturu a polární bázi Q. Určety charakter Q (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme
   (a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,
   (b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.

8. Nechť Q je kvadratická forma ve V_4 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte polární bázi Q, je-li
$$^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar $h(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Najděte $\mathcal{X}$ bázi $\mathbb{R}^3$ tak, aby
   (a) $^{\mathcal{X}}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

(b) $^{\mathcal{X}}h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte nulprostor Q. Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

11. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Q má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3.$$
Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru Q.

12. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3.$$
Určete charakter formy Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3.$$
Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby
   (a) Q byla PD,
   (b) Q byla singulární.