Cvičení LAA6

Vlastní čísla a vlastní vektory matic a operátorů

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic

   (a)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Vyšetřete vztah:

   (a) spekter $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (b) algebraických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (c) geometrických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (d) diagonalizovatelnosti $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$.

3. Je $\mathbb{A}^{-1}$ diagonalizovatelná matice? Pokud ano, najděte regulární $\mathbb{X}$ a diagonální $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor zrcadlení podle osy x. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru ručiček hodin. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

6. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X}$ je báze V_3. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice.

   (a)
$${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
$${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X}$ je báze V_3. Je A^{-1} diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$ je diagonální matice.
$${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

8. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.
$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je A diagonalizovatelný.
$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ splňuje $Ax(t) = x(\alpha - 2t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je A diagonalizovatelný? Pro taková α najděte $\mathcal{Y}$ bázi $\mathcal{P}_3$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

11. Nechť $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ jsou operátory derivování a integrování na $\mathcal{P}$. Najděte spektrum a všechny vlastní vektory D a S.

12. Nechť $P, Q \subset\subset V, P \neq V, Q \neq V, P \oplus Q = V$. Nechť A je projektor na P podle Q.
    (a) Nalezněte $\sigma(A)$.
    (b) Určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel operátoru A, je-li $\dim V \in \mathbb{N}$.
    (c) Je operátor A diagonalizovatelný v případě $\dim V \in \mathbb{N}$?