Cvičení LAA5

Determinant

1. Nechť $(D_n)_{n=1}^{+\infty}$ je komplexní posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$, kde $p, q \in \mathbb{C}$ a $p \cdot q \neq 0$. Potom platí:

   (a) Pro $q = 0$ je $D_n = p^{n-2}D_2$ pro $n \geq 3$.

   (b) Pro $q \neq 0$ označme λ_1, λ_2 kořeny rovnice $x^2 = px + q$.

      i. Pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

      ii. Pro $\lambda_1 = \lambda_2$ je $D_n = (c_1 + nc_2)\lambda_1^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

   Dokažte.

2. Pomocí předchozího příkladu spočtěte

   (a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

   kde $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$.

   (c)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & a & \dots & a & a \\ b & 0 & a & a & \dots & a & a \\ b & b & 0 & a & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & b & 0 \end{vmatrix}.$$

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic

   (a)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$