Cvičení LAA4

Determinant

1. Spočtěte následující determinant opakovaným rozvojem podle řádku či sloupce.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & y & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix},$$

   kde všechny prvky matice jsou komplexní čísla.

2. Víte-li, že a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, dokažte, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$

3. Spočtěte $\det D$, kde $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ je operátor derivování.

4. Vypočtěte

   (a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

   (b)

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$

   (c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

5. Spočtěte determinant

   (a) pomocí faktu, že jde o n-lineární formu,

   (b) rozložením příslušné matice na součin dvou matic.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

6. Jak se změní determinant matice n-tého řádu s komplexními prvky, pokud

   (a) napíšeme řádky v opačném pořadí,

(b) napíšeme sloupce v opačném pořadí,

(c) překlopíme matici podle hlavní diagonály,

(d) překlopíme matici podle vedlejší diagonály,

(e) zrcadlíme prvky matice podle středu,

(f) každý prvek vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

(g) každý prvek $\mathbb{A}_{ij}$ vynásobíme α^{i-j}, $\alpha \neq 0$,

(h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního odečteme původní první řádek,

(i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,

(j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým.

7. Následující domácí úkol vypracujte do 7.4. ve skupinách po pěti. Jde o společnou práci, tedy každý z vás musí řešení rozumět a musí být schopen mi ho vysvětlit. Úkol odevzdejte vypracovaný tak, aby byl každý krok jasný.

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

(b) $$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}, \text{ kde } \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \text{ pro každé } i \in \widehat{n}.$$

(c) $$\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}, \text{ kde } x \neq 0.$$

(d) $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$