

Cvičení LAA3

Permutace a determinant

1. Necht $\pi \in S_9$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Najděte všechny inverze v π a určete $\text{sgn}\pi$.
(b) Napište π jako složení transpozic.
2. Najděte všechny inverze v transpozici. Ověřte, že znaménko je -1 .
3. Necht $\pi \in S_{3n}$

$$\pi = (2\ 5\ 8 \dots (3n-1)\ 3\ 6\ 9 \dots (3n)\ 1\ 4\ 7 \dots (3n-2)).$$

Najděte všechny inverze v π .

4. Necht $\pi_1, \pi_2 \in S_5$

$$\pi_1 = (53241), \pi_2 = (24513).$$

Najděte $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, π_1^{-1} . Zapište π_1 a π_2 jako složení cyklů. Pro jaké nejmenší $k \in \mathbb{N}$ platí $\pi_2^k = \epsilon$?

5. Necht $\pi \in S_7$

$$\pi = (2, 3, 6, 7, 1, 4, 5).$$

Pozor, jde o zápis pomocí cyklu, tedy $\pi(2) = 3, \pi(3) = 6, \pi(6) = 7, \pi(7) = 1, \pi(1) = 4, \pi(4) = 5, \pi(5) = 2$.

Dokažte, že $\pi^{259} = \epsilon$.

6. Rozhodněte, zda jde o člen determinantu matice \mathbb{A} řádu 6.

(a) $\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{26}\mathbb{A}_{65}$,

(b) $\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{26}$.

7. Pro jaké i, k jde o člen determinantu matice \mathbb{A} řádu 7?

$$-\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{3k}\mathbb{A}_{76}\mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{57}\mathbb{A}_{4i}\mathbb{A}_{65}.$$

8. Určete, jaké znaménko má v determinantu \mathbb{A} řádu n součin prvků

(a) na hlavní diagonále,

(b) na vedlejší diagonále.

9. Rozložte polynom p na kořenové činitele bez výpočtu determinantu

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}.$$

10. Čemu se rovná determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix}?$$

11. Víte-li, že 23 dělí beze zbytku čísla 253, 529, 391, dokažte bez výpočtu determinantu, že je také dělitelný beze zbytku číslem 23.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$