Cvičení LAA2

Regulární a inverzní matice a operátor

1. Nechť $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix}$. Najděte co nejjednodušší nutnou a postačující podmínku, aby byl operátor A regulární.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Dokažte, že A je regulární, platí-li $Ax(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$ a $t \in \mathbb{C}$.

3. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte, že je-li A regulární a B není regulární, pak AB ani BA není regulární.

4. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Platí implikace: Není-li A ani B regulární, pak AB ani BA není regulární?

5. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte ekvivalenci: A i B je regulární, právě když AB i BA je regulární.

6. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte implikaci: Je-li $A^2 - A + I = \Theta$, pak A je regulární.

7. Jsou dány matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste spočetli $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pak pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.

8. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$? Pro taková α ji najděte. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

9. Najděte $\mathbb{A}^{-1}$, je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_4 nad tělesem T. Nechť pro každé $\vec{x} \in V_4$ při označení $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$ platí
$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \ \beta_2 = \alpha_2 - 2\alpha_3, \ \beta_3 = \alpha_3 + 3\alpha_4, \ \beta_4 = -3\alpha_1 + \alpha_4.$$
Najděte ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$.

11. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ a ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ a $\mathcal{Y} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ jsou báze $\mathbb{C}^2$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$.

12. Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3. Nechť pro každé $\vec{x} \in V_3$ platí $A\vec{x} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\vec{x}_2 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\vec{x}_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})$.

13. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ a platí $Ax(t) = x(t+1) - 2x(t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a $t \in \mathbb{C}$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1})^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ splňující pro každé $t \in \mathbb{C}$

$$x_1(t) = 3 - t + 2t^2,\ x_2(t) = 2 + 3t - t^2,\ x_3(t) = -1 + 2t + 4t^2,$$

$$y_1(t) = -8 - 3t - 2t^2,\ y_2(t) = -2 - t + t^2,\ y_3(t) = -13 - 10t - 4t^2.$$