

Cvičení LAA10

Lineární funkcionály a lineární operátory na prostorech se skalárním součinem

1. Nechtě $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, kde \mathbb{C}^3 je unitární prostor. Najděte $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ platí $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$.

$$\varphi(\vec{x}) = 2x_1 + ix_2 - 4x_3 \quad \text{pro každé } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Nechtě $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Dále $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Najděte $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ platí $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$.

3. Nechtě \mathcal{X} je ON báze \mathcal{H}_2 nad \mathbb{C} . Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ byl unitární.

(a) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$.

4. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány podprostory

$$P \equiv \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}, \quad Q \equiv x - y = 0.$$

Nechtě $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze \mathbb{R}^3 , A_P je projektor na P podle Q . Sestavte ${}^{\mathcal{X}}(A_P^*)$.

5. Nechtě $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, kde \mathbb{R}^3 je eukleidovský prostor. Dále pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ je definováno $A\vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$.

(a) Je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?

(b) Je A diagonalizovatelný?

(c) Je A normální?

(d) Je A regulární?

6. Nechtě $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right)$ je báze unitárního prostoru \mathbb{C}^2 , $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ a ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$.

7. Nechtě $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde \mathbb{R}^3 je eukleidovský.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A je ortogonální a $\det A < 0$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

8. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde \mathbb{R}^3 je eukleidovský.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

A je symetrický a má 2-násobné záporné vlastní číslo. Najděte $\mathcal{E}A$.

9. Nechť D je operátor derivování na \mathcal{P}_3 se skalárním součinem

$$\langle x|y \rangle = \alpha_0 \overline{\beta_0} + \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2},$$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze \mathcal{P}_3 , kde $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$, $x_2(t) = t^2 - 1$, $x_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(D^*)$.

10. Dokažte: Nechť \mathcal{X} je ON báze v \mathcal{H}_n . Pak \mathcal{Y} je ON báze v \mathcal{H}_n , právě když ${}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{X}}$ je unitární matice.

11. Nechť \mathcal{X} je ON báze \mathcal{H}_3 nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$, ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Najděte ON bázi \mathcal{Y} , v níž má A diagonální tvar.