Cvičení LAA

Frobeniova věta – řešení soustav LAR s parametry

Není-li řečeno jinak, hledejte řešení v oboru komplexních čísel.

1. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & \alpha\beta z & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & \beta z & = & \alpha\beta \\ \alpha\beta x & + & y & + & \alpha z & = & \beta \end{array} .$$

2. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \alpha\beta y & + & \beta z & = & 1 \\ -\beta x & + & \beta y & + & \beta z & = & \beta \\ \alpha\beta x & + & \alpha y & - & \beta z & = & 1 \end{array} .$$

3. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \alpha y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{array} .$$

4. Najděte množinu všech reálných řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \alpha y & + & \alpha^2 z & = & \alpha^3 \\ x & + & \beta y & + & \beta^2 z & = & \beta^3 \\ x & + & \gamma y & + & \gamma^2 z & = & \gamma^3 \end{array} .$$

5. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \beta y & + & \beta z & = & 1 \\ \beta x & + & \alpha y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array} .$$

6. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & iy & - & iz & = & i \\ ix & + & \alpha y & + & \alpha z & = & i \end{array} .$$

7. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte množinu řešení $x, y, z \in \mathbb{R}$ soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha\beta y & + & \alpha\beta^2 z & = & \alpha\beta \\ \beta x & + & \beta\alpha y & + & \beta\alpha^2 z & = & \beta\alpha \end{array} .$$

8. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ (1+2\alpha\beta)x & + & \alpha^2\beta y & + & \alpha\beta z & = & 1 \\ \alpha^2\beta x & + & \alpha^3\beta y & + & (2-\alpha)\beta z & = & \beta \end{array} .$$

9. Určete, pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je soustava řešitelná, případně určete dimenzi množiny řešení.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \beta^2 x & + & y & + & \beta z & = & \beta \\ \alpha x & - & \beta y & + & z & = & \beta^2 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \beta z & = & \alpha \end{array}.$$

Výsledky: Frobeniova věta

S značí množinu řešení soustavy LAR.

1. (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq \pm 1 \wedge \beta \neq \alpha^2$ existuje 1 řešení

   (b) pro $\alpha = \beta = 0$ je $S = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (c) pro $\alpha = \beta = 1$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (d) pro $\alpha = 1 \wedge \beta = -1$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (e) v ostatních případech řešení neexistuje

2. (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq -1 \wedge \alpha(\beta - 1) \neq 2\beta$ existuje 1 řešení

   (b) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (c) v ostatních případech řešení neexistuje

3. (a) pro $\beta \neq -\frac{\alpha}{2} \wedge \beta \neq \alpha$ je $S = \{\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \end{pmatrix}\}$

   (b) pro $\beta = \alpha \wedge \beta \neq 0$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (c) v ostatních případech řešení neexistuje

4. (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq \gamma \wedge \beta \neq \gamma$ existuje 1 řešení

   (b) pro $\alpha = \beta = \gamma$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (c) pro $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma$ je $S = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma^2 - \alpha^2\gamma \\ \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ -\alpha - \gamma \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (d) pro $\alpha = \gamma \wedge \alpha \neq \beta$ nebo $\beta = \gamma \wedge \beta \neq \alpha$ je $S = \begin{pmatrix} -\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ -\alpha - \beta \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

   (e) v ostatních případech řešení neexistuje

5. (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq -\alpha - 1$ existuje 1 řešení

(b) pro $\alpha \neq -\frac{1}{2} \wedge \beta = -\alpha - 1$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+2}{2\alpha+1} \\ \frac{\alpha-1}{2\alpha+1} \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\alpha^2+1 \\ -\alpha^2-\alpha-1 \\ 2\alpha+1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(c) pro $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(d) v ostatních případech řešení neexistuje

6. (a) pro $\alpha \neq \pm i$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2i\alpha \\ 1-\alpha^2 \\ 1+\alpha^2 \end{pmatrix}]_\lambda$

(b) pro $\alpha = i$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(c) pro $\alpha = -i$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(d) v ostatních případech řešení neexistuje

7. (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$ je $S = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

(b) pro $\alpha = \beta = 0$ je $S = \mathbb{R}^3$

(c) pro $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$ je $S = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(d) pro $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 1$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\beta \\ \beta+1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(e) pro $\alpha = \beta = 1$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$

(f) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 0$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(g) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 1$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha+1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(h) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha = \beta$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha+1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(i) v ostatních případech řešení neexistuje

8. (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 \wedge \beta \neq 0$ existuje 1 řešení

(b) pro $\alpha = -2 \wedge \beta = -\frac{1}{8}$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda$

(c) pro $\alpha = 1 \wedge \beta = 1$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$

(d) pro $\beta = 0$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje

9. (a) pro $\beta \neq \pm i \wedge \alpha \neq \pm\beta$ je dim $S = 0$

(b) pro $(\beta \neq \pm i \wedge \alpha = \beta)$ nebo $(\beta = i \wedge \alpha = -\frac{1}{3}i)$ nebo $(\beta = -i \wedge \alpha = \frac{1}{3}i)$ je dim $S = 1$

(c) v ostatních případech je $S = \emptyset$