PRAXE

Vzorové řešení sk. písemky 28.5.2012

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -\alpha & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha & 2\alpha^2 \end{array}\right)$$

1b $\alpha = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ N.Ř.

1b $\alpha = -1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$

$\alpha \neq \pm 1$ 2b $S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1} \\ 0 \\ \frac{2\alpha^2}{1-\alpha} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1+\alpha \end{pmatrix}\right]_\lambda$

$$x = -\alpha - \frac{2\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{-\alpha-\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$x = \alpha - 1 - \alpha = -1$$

2. a)

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} & & n & & & \\ & ⋰ & & & & \\ 1 & & & & & \\ \hline & & & & & m \\ & & & & ⋰ & \\ & & & 1 & & \end{array}\right|$$

$\frac{n}{2}$ záměn

$\frac{m-1}{2}$ záměn

$$= (-1)^{\frac{n}{2}+\frac{m-1}{2}} \left|\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & n & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & m \end{array}\right| = (-1)^{\frac{n+m-1}{2}} n! \cdot m!$$

2b

b) $\det A = \sum_{\pi \in S_{n+m}} \operatorname{sgn} \pi \, A_{1\pi(1)} \cdots A_{n+m\,\pi(n+m)} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & n+m \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 & n+m & n+m-1 & \dots & n+1 \end{pmatrix} \cdot n! \cdot m!$

inverze $(1,2), (1,3), \dots, (1,n)$
$(2,3), (2,4), \dots, (2,n)$
$\vdots$
$(n-1,n)$
$(n+1,n+2), \dots, (n+1,n+m)$
$(n+2,n+3), \dots, (n+2,n+m)$
$\vdots$
$(n+m-1,n+m)$

$$I_\pi = n+(n-1)+\dots+1+ m+(m-1)+\dots+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\det A = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}} \cdot n! \cdot m!$$ 2b

3.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & (-2-\lambda) & -2 \\ 3 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ (-2\lambda) & (-\lambda) & 0 \\ 3 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3\lambda & 0 & (-\lambda) \end{vmatrix} = (-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda^2) \begin{vmatrix} (4-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-\lambda^2)(-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda^2$$

$\sigma(A) = \{0, 2\}$ 1b

vl. vekt. k 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,5 0,5

vl. vekt. k 2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

0,5

$V_a(0) = 2 = V_g(0)$
$V_a(2) = 1 = V_g(2)$ $\Rightarrow A$ je diagonalizovatelná 1b

0,5 zdůvodnění

4.

$$\begin{pmatrix}1&1&2&-2&3\\0&1&1&1&-1\\2&1&3&1&1\\1&-1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&2&2&-2&2\\0&1&1&1&-1\\0&3&3&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&-4&4\\0&0&0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$P=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$$

ON báze – nejprve OG, pak vydělení normami

$\vec{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{x_2}$ z podm. $\vec{x_2}\in P$, tj: $\vec{x_2}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

a $\vec{x_2}\perp\vec{x_1}$, tj: $\alpha+\beta-2\mu+2(2\alpha+\beta+\mu)+\alpha-\beta=0$

$(6\ 2\ 0)$ $\quad \mu=1$, $\alpha=0=\beta$

$\vec{x_2}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

OG báze $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}\right)$

a ON báze $\left(\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}\right)$

1b 1b 1b

postup 1b

$\vec{x_3}$ z podm. $\vec{x_3}\in P$, tj: $\vec{x_3}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

a $\vec{x_3}\perp\vec{x_1}$, tj: $6\alpha+2\beta=0$

a $\vec{x_3}\perp\vec{x_2}$, tj: $-2(\alpha+\beta-2\mu)+\beta+\mu+2\alpha+\beta+\mu=0$

$6\mu=0$

$\vec{x_3}=-\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \mu=0$, $\beta=3$, $\alpha=-1$

5. $W_2=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}0\\2\\-3\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$

$(0\ 2\ -3\ 1)$

a) W_1 je nadrovina ($\dim W_1=3$) 0,5

b) $W_2\equiv$ $x=3$, $y=2+2t$, $z=-3t$, $u=t$ 0,5

c) $Z(W_1)=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&-1&2\\0&2&0&-3\\0&0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&-3\\0&0&-2&13\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

nejsou rovnoběžné
jsou různoběžné 1b

d) $W_1\cap W_2$: $2(2+2t)-3(-3t)+t=3$

$+14t=-1 \quad t=\frac{-1}{14}$

$W_1\cap W_2=\cancel{\left\{\begin{pmatrix}3\\5/2\\-3/4\\1/4\end{pmatrix}\right\}}$ 2b $\left\{\begin{pmatrix}3\\13/7\\3/14\\-1/14\end{pmatrix}\right\}$

TEORIE 1 a) Nechť A typu $m\times n$ s prvky z T. Pak hodností A nazveme

1 $h(A)=\dim[A_{\cdot1},A_{\cdot2},\dots,A_{\cdot n}]_\lambda$, kde $A_{\cdot i}$ je i-tý sloupec A.
Nechť $A\in\mathcal{L}(P,Q)$, ~~nechť X báze P, Y báze Q~~, kde P,Q vekt. pr. nad T. Pak hodností A nazveme $h(A)=\dim A(P)$.

1 b) Nechť $A\in\mathcal{L}(P,Q)$, nechť $\mathcal{X}$ báze P, $\mathcal{Y}$ báze Q, pak $h(A)=h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.

dk.: $h(A)=\dim A(P)=\dim A\underbrace{[\vec{x_1},\dots,\vec{x_n}]_\lambda}_{\text{báze }\mathcal{X}}=\dim\underbrace{[A\vec{x_1},\dots,A\vec{x_n}]_\lambda}_{V}$

1 $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})=\dim\underbrace{[(A\vec{x_1})_{\mathcal{Y}},\dots,(A\vec{x_n})_{\mathcal{Y}}]_\lambda}_{W}$

hodnosti se rovnají, protože mezi W a V existuje ~~se~~ izomorfismus zobrazující V na W (jde o souřadnicový izomorfismus v bázi $\mathcal{Y}$)

(2) a) Nechť $(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$ je LN z vekt. pr. $(V, \langle \cdot \rangle)$. Pak existuje

1b OG soubor $(\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n})$ takový, že $[\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}]_\lambda = [\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}]_\lambda$.

b) $\vec{y_1} := \vec{x_1}$ máme-li $(\vec{y_1}, \dots, \vec{y_k})$ OG soubor s vlastností

2b $[\vec{y_1}, \dots, \vec{y_k}]_\lambda = [\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k}]_\lambda$, pak

$\vec{y_{k+1}}$ získáme ze vztahu $\vec{y_{k+1}} = \vec{x_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{x_{k+1}} | \vec{y_j} \rangle}{\|\vec{y_j}\|^2} \vec{y_j}$

(3) a) Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. A nazveme normální, pokud $A \cdot A^H = A^H A$,

0,5 kde $A^H = \overline{A^T}$.

1 b) $\Leftrightarrow$ v $\mathbb{C}^n$ existuje ON báze ze vlastních vektorů A.

0,5 c) λ je vl. číslo A s vl. vektorem $\vec{x} \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ je vl. číslo A^H s vl. vektorem $\vec{x}$

d) ii), iii), iv) (tvrzení totiž platí pro normál. matice

0,25 0,25 0,25 a herm. a unit. jsou podmnožinou normálních matic)

i) neplatí, protipř. $\left\|\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = 1 \quad \left\|\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}$

0,25