Zkoušková písemka 30.5.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta x & + & \beta y & - & z & - & u & = & \beta \\ x & + & y & & & + & \beta u & = & -\beta \\ & & & & z & + & u & = & 0 \end{array} .$$

[4 body]

2. (a) Spočtěte determinant matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (1) rozvojem podle řádků či sloupců, (2) řádkovými úpravami.

   (b) Spočtěte det $(\mathbb{A}^{-1})$.

   (c) Spočtěte det $(\frac{1}{2}\mathbb{A})$.

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda je $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$. Vysvětlete.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Najděte OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ do $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$.

   (a) je-li $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský,

   (b) je-li $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccc} 2x & + & 2y & = & 0 \\ x & - & y & = & 1 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv \begin{array}{ccc} x & = & 1 + t + 2s \\ y & = & -1 + t + 2s \\ z & = & 2 - t - 2s \\ u & = & 0 \end{array} .$$

   (a) Určete jakým typem variety jsou W_1 a W_2,

   (b) zapište W_2 jako afinní obal,

(c) určete vzájemnou polohu W_1 a W_2,
(d) najděte průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte s předpoklady!

1. (a) Vyslovte Frobeniovu větu.
   (b) Dokažte 1. bod Frobeniovy věty, tedy tvrzení o existenci řešení soustavy.

   [3 body]

2. (a) Vyslovte a dokažte Pythagorovu větu.
   (b) Za jaké podmínky lze implikaci v Pythagorově větě obrátit?
   (c) Vyslovte větu o trojúhelníkové nerovnosti.
   (d) Nabývá se pro vektory $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 1000 \\ -2000 \\ 2000 \\ -1000 \end{pmatrix}$ z eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ rovnost v trojúhelníkové nerovnosti?

   [3 body]

3. (a) Definujte unitární a ortogonální (OG) matici.
   (b) Co platí pro vlastní čísla OG matic?
   (c) Co platí pro determinant OG matic?
   (d) Co platí pro vlastní vektory OG matic příslušné různým vlastním číslům?
   (e) Je $\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ OG matice?

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.