Zkoušková písemka 28.5.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & \alpha^2 \\ -x & - & \alpha y & - & z & = & \alpha \end{array}.$$

[4 body]

2. Nechť n sudé, m liché, $n, m \in \mathbb{N}$. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ typu $(n+m) \times (n+m)$

(a) záměnou řádků, (b) z definice.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m} \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{m-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 2$ a $m = 3$.

[4 body]

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$.

Najděte ortonormální bázi P.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:
$W_1 \equiv 2y - 3z + u = 3$ a W_2 je přímka kolmá na W_1 (tedy se směrovým vektorem ze $Z(W_1)^\perp$) a procházející bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Určete

   (a) jakým typem variety je W_1,
   (b) parametrické rovnice W_2,
   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,
   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení.
   (b) Jaký je vztah mezi hodností matice zobrazení v bázích a hodností zobrazení.
   (c) Tvrzení dokažte.

   [3 body]

2. (a) Vyslovte precizně Gramovu-Schmidtovu větu.
   (b) Popište Gramův-Schmidtův OG proces, tedy konstrukci hledaného OG souboru.

   [3 body]

3. (a) Definujte normální matici.
   (b) Doplňte větu: “$\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je normální matice, právě když ...” (Samozřejmě nechci, abyste zopakovali definici.)
   (c) Co víte o vztahu vlastních čísel a vlastních vektorů $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^H$, je-li $\mathbb{A}$ normální matice?
   (d) Zaškrtněte správné možnosti: Pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $||\mathbb{A}\vec{x}|| = ||\mathbb{A}^H\vec{x}||$, pokud
      i. $\mathbb{A}$ je regulární,
      ii. $\mathbb{A}$ je normální,
      iii. $\mathbb{A}$ je hermitovská,
      iv. $\mathbb{A}$ je unitární.

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.

2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.