# Zkoušková písemka 27.6.2012 Jméno:

## Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \\ \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}.$$

   [4 body]

2. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$?

   (b) Pro taková $\alpha$ najděte $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací.

   (c) $[\mathbb{A}^{-1}]_{13}$ najděte i pomocí adjungované matice $\mathbb{A}^{adj}$ (ať je vidět, jaký vzorec používáte).

   [4 body]

3. Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná?

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. $P = \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$.

   (a) Najděte ortonormální bázi $P$.

   (b) Najděte ortogonální průmět vektoru $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ do $P$.

   [4 body]

5. Nechť $W_1, W_2$ jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 3y & + & 3z & = & -2 \end{array}, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 3y & & & + & 3u = -2 \\ & & & & 3z & & = -2 \end{array}.$$

   Určete

   (a) jakým typem variety je $W_2$,

   (b) parametrické rovnice $W_2$,

   (c) vzájemnou polohu $W_1$ a $W_2$,

   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

## Teorie

Tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Vyjmenujte ekvivalentní řádkové úpravy (EŘÚ).
   (b) Jak se mění determinant matice <u>ekvivalentními</u> řádkovými úpravami?
   (c) Vyslovte větu, která říká, že EŘÚ odpovídají násobení jistou maticí.
   (d) Dokažte pomocí předchozí větu Gaussovu úplnou eliminaci pro hledání inverzní matice.

   [3 body]

2. (a) Definujte lineární varietu. Vysvětlete pojem z lineární geometrie, který v definici použijete.
   (b) Je trojúhelník v $\mathbb{R}^2$ lineární varietou? Vysvětlete.
   (c) Vyslovte větu, která říká, že každý posunutý podprostor je lineární varieta.
   (d) Vyslovte <u>precizně</u> větu, která říká, že každá lineární varieta je posunutý podprostor.

   [3 body]

3. (a) Definujte skalární součin.
   (b) Je zobrazení $\langle . | . \rangle : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definované pro každé $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ jako $\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$ skalární součin? Vysvětlete.
   (c) Definujte úhel a spočtěte úhel mezi vektory $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ v eukleidovském $\mathbb{R}^2$.

   [3 body]

## Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá $\geq 19$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.