Zkoušková písemka 25.6.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & \alpha^2 y & + & \alpha z & = & -\alpha \\ -x & + & y & - & \alpha z & = & \alpha \end{array}.$$

[4 body]

2. (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$?
   (b) Pro taková α najděte $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací.
   (c) Pro $\alpha = \frac{1}{2}$ najděte Gaussovou eliminací $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ (tedy aniž byste násobili $\mathbb{C}$ a $\mathbb{A}^{-1}$).

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

3. Je matice $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace, tedy $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$. $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte ortogonální doplněk P do $\mathbb{R}^4$, pokud
   (a) $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský,
   (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je přímka rovnoběžná s W_3 a procházející bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$.

W_2 je nejmenší lineární varieta obsahující body $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Určete
   (a) jakým typem variety je W_2,
   (b) normálové rovnice W_2,
   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

(d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

Tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte matici adjungovanou $\mathbb{A}^{adj}$.
   (b) Co lze spočíst pomocí matice adjungované?
   (c) Odvoďte vzorec pro výpočet det $\mathbb{A}^{adj}$, znáte-li det $\mathbb{A}$.

   [3 body]

2. (a) Definujte inverzi v permutaci a transpozici. Ilustrujte pojmy na permutaci $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) Jak spočteme znaménko permutace pomocí inverzí a jak pomocí transpozic? Ilustrujte na permutaci $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

   [3 body]

3. (a) Definujte konvexní množinu.
   (b) Definujte konvexní obal.
   (c) Jak může vypadat konvexní obal 3 různých bodů v $\mathbb{R}^2$?
   (d) Je každá konvexní množina konvexním obalem? Zdůvodněte.
   (e) Je každý konvexní obal konvexní množinou?

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.