

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + \alpha z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

[4 body]

2. Necht $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte

- (a) \mathbb{A}^{-1} Gaussovou eliminací,
 (b) $[\mathbb{A}^{-1}]_{34}$ pomocí matice adjungované k \mathbb{A} (ať je vidět, jaký vzorec využíváte),
 (c) 3. složku řešení $\mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pomocí Cramerova pravidla.

[4 body]

3. Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ je matice \mathbb{A} podobná matici $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$? V takovém případě najděte matici \mathbb{X} splňující $\mathbb{A} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbb{X}^{-1}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Najděte ortonormální bázi $P \subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$ a \mathbb{R}^4 je eukleidovský prostor. Dále najděte OG průmět $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P .

[4 body]

5. Necht W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^4 zadané následovně: W_1 je spojnice bodů $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $W_2 \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ z - u = 1 \end{cases}$. Určete

- (a) jakým typem variety je W_2 ,
 (b) parametrické rovnice W_1 ,
 (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2 ,
 (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte s předpoklady!

1. (a) Definujte afinní obal.
- (b) Nakreslete afinní obal 2 různých vektorů v \mathbb{R}^2 .
- (c) Definujte konvexní obal.
- (d) Nakreslete konvexní obal 2 různých vektorů v \mathbb{R}^2 .
- (e) Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Vyberte, která inkluze platí.
 - i. $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_\alpha \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_\kappa$,
 - ii. $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_\kappa \subset [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k]_\alpha$.

[2,5 bodu]

2. (a) Definujte pozitivně definitní matici.
- (b) Jaká vlastní čísla má pozitivně definitní matice? Tvrzení dokažte.
- (c) Které z následujících matic jsou pozitivně definitní? Vysvětlete proč.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[3,5 bodu]

3. (a) Definujte normální, unitární a hermitovské matice.
- (b) Které čtvercové matice mají následující vlastnosti (uvedte nejširší možné třídy):
 - i. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou LN.
 - ii. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou OG.
 - iii. I když mají některé prvky ryze komplexní (tedy komplexní nereálná čísla), mají reálný determinant.
 - iv. Sloupce matice tvoří ON bázi.

[3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.