Zkoušková písemka 11.6.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & u & = & 1 \\ \alpha x & & & - & \alpha z & & & = & 0 \\ & - & \alpha y & & & + & \alpha u & = & 0 \end{array}.$$

   [4 body]

2. Spočtěte
   (a) $\det \mathbb{A}$,
   (b) $\mathbb{A}^{-1}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

3. Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

4. Nechť P je podprostor eukleidovského $\mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte
   (a) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,
   (b) OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ do P, tedy $\vec{x}_P$,
   (c) vzdálenost $\vec{x}_P$ od P, tedy $\rho(\vec{x}_P, P)$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: W_1 je rovina rovnoběžná s $[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$ a prochází bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $W_2 \equiv x + y + z - u = 0$. Určete
   (a) jakým typem variety je W_2,
   (b) W_1 jako afinní obal,
   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,
   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte s předpoklady!

1. (a) Vyslovte větu, která říká, že ekvivalentní řádkové úpravy v matici odpovídají násobení jistou maticí zleva.
   (b) Vyslovte větu o úplné Gaussově eliminaci.
   (c) Dokažte ji s využitím tvrzení (a).
   (d) Jaké všechny úlohy lze úplnou Gaussovou eliminací řešit?

   [3 body]

2. (a) Definujte unitární matici.
   (b) Které z následujících matic jsou unitární?

$$(a)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad (c)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Co víte o vlastních číslech unitárních matic? (Vyslovte nejpřesnější možné tvrzení.)
   (d) Co víte o diagonalizaci unitárních matic? (Vyslovte nejpřesnější možné tvrzení.)
   (e) Co víte o vlastních vektorech unitárních matic příslušných různým vlastním číslům? (Vyslovte nejpřesnější možné tvrzení.)

   [3 body]

3. (a) Dokažte, že pro každé $\vec{x}, \vec{y}$ z reálného prostoru $(V, \langle . | . \rangle)$ platí:

$$\| \vec{x} \| = \| \vec{y} \| \Rightarrow \langle \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0.$$

   (b) Vyslovte Schwarzovu-Cauchyovu nerovnost včetně dodatku, kdy nastává rovnost.
   (c) Definujte úhel mezi vektory.
   (d) Jak plyne korektnost definice úhlu ze Schwarzovy-Cauchyovy nerovnosti?

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.