Zkoušková písemka 6.9.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \\ & & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \\ x & & & + & z & = & -1 \end{array}.$$

   V případě, kdy má soustava řešení jediné, najděte jeho 2. složku také pomocí Cramerova pravidla. (Z postupu ať je vidět, jaký vzorec používáte.)

   [4 body]

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte det $\mathbb{A}$

   (a) přímo z definice, (b) záměnou řádků.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2^3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 2^{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nevíte-li si rady obecně, najděte řešení pro $n = 4$ a $n = 5$.

   [4 body]

3. Pro jaké všechny parametry $\beta \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? V takových případech najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory $\mathbb{A}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor, kde $P = \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Najděte

   (a) $P^\perp$,

   (b) ON bázi P,

   (c) OG průmět vektoru $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ do P.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \quad W_2 \equiv x - y + z = 1, \quad W_3 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha.$$

   Určete

(a) jakým typem variety je W_3,
(b) normálové rovnice W_3,
(c) průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte podobné matice.
   (b) Uveďte příklad dvou podobných, ale nikoliv stejných matic. Zdůvodněte, proč jsou podobné.
   (c) Definujte diagonalizovatelnou matici.
   (d) Vyslovte dvě tvrzení, která jsou ekvivalentní s diagonalizovatelností matice.

   [3 body]

2. (a) Definujte hermitovsky sdruženou matici.
   (b) Definujte hermitovskou matici.
   (c) Co víte o vlastních číslech, diagonalizovatelnosti a vlastních vektorech hermitovských matic? (Uveďte nejpřesnější možná tvrzení.)
   (d) Jaký je vztah mezi množinou normálních, množinou hermitovských a množinou symetrických matic? (Která je podmnožinou které?)

   [3 body]

3. (a) Definujte afinní obal a lineární obal. Je jeden podmnožinou druhého a proč?
   (b) Jak může vypadat afinní obal 3 různých bodů v $\mathbb{R}^2$?
   (c) Zapište afinní obal jako posunutý lineární obal.

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13-14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15-16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17-18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.