

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} \alpha x + y + \alpha z - 2u & = & \alpha \\ x + \alpha y + \alpha z & = & \alpha \end{array}.$$

[4 body]

2. Najděte, aniž byste počítali \mathbb{A}^{-1} , ty z matic, které existují

- (a) i. $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$,
 ii. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}$,
 iii. $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$,
 iv. $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$,

Dále spočtete

- (b) $\det \mathbb{A}^{adj}$, tedy matice adjungované k \mathbb{A} ,

- (c) $[\mathbb{A}^{-1}]_{32}$ (z výpočtu ať je vidět, jaký vzorec používáte).

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

3. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbb{A} . Rozhodněte, zda matice \mathbb{B} , která vznikne z \mathbb{A} záměnou prvního a třetího řádku, má stejné spektrum jako matice \mathbb{A} .

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Nechť W je lineární varieta v eukleidovském \mathbb{R}^4 , kde $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \right\}$.

Najděte OG bázi zaměření variety

- (a) Gramovým-Schmidtovým OG procesem,
 (b) jiným způsobem.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^4 zadané následovně:

$$W_1 \text{ je rovina rovnoběžná s } W_2 \text{ a procházející bodem } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x + y + z + u & = & 0 \\ x - y & = & 1 \end{array},$$

$$W_3 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}$$

Určete

- (a) jakým typem variety je W_3 ,
- (b) parametrické rovnice W_3 ,
- (c) vzájemnou polohu W_1 a W_3 ,
- (d) průnik $W_1 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte charakteristický polynom matice.
 (b) Jaký je vztah mezi charakteristickým polynomem a vlastními čísly matice?
 (c) Jaký je stupeň charakteristického polynomu a jaký je koeficient charakteristického polynomu u členu nejvyššího stupně? Proč?
 (d) Jaký je koeficient charakteristického polynomu u konstantního členu?
 (e) Jak spočteme determinant matice pomocí vlastních čísel? Dokažte.

[3 body]

2. (a) Definujte skalární součin v \mathbb{C}^n (obecný, nikoliv standardní).
 (b) Je zobrazení, které každé dvojici vektorů $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ z \mathbb{C}^2 přiřadí číslo $x_1y_1 + x_2y_2$, skalárním součinem v \mathbb{C}^2 ? Své tvrzení zdůvodněte.
 (c) Definujte úhel mezi vektory. Kdy je úhel tupý?

[3 body]

3. (a) Vyslovte vzorec pro výpočet \mathbb{A}^{-1} pomocí matice adjungované.
 (b) V čem je výhodný a v čem nevýhodný oproti úplné Gaussově eliminaci?
 (c) Jak spočtete determinant matice adjungované k \mathbb{A} , tedy $\det \mathbb{A}^{adj}$, znáte-li $\det \mathbb{A}$?

[3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.