Zkoušková písemka 4.6.2012 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \\ x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \end{array}.$$

   [4 body]

2. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ sudého řádu n

$$(a) \quad \text{z definice,} \qquad (b) \quad \text{záměnou řádků.}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{n} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad \text{Dále najděte } \mathbb{A}^{-1}.$$

   Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 8$.
   [4 body]

3. Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & 1 & \beta \end{pmatrix}$.

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 - x_2 = 0 \wedge x_3 = 0\}$. Najděte $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$, je-li

   (a) $\mathbb{R}^4$ eukleidovský,

   (b) $\mathbb{R}^4$ vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $W_2 \equiv x = 0$. Určete

   (a) jakým typem variety je W_1 a W_2,
   (b) parametrické rovnice W_2,
   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

(d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte ortogonální doplněk podprostoru. Zapište jej jako množinu.
   (b) Existuje ke každému podprostoru vždy jediný OG doplněk?
   (c) Co víte o dimenzi OG doplňku podprostoru?
   (d) Dokažte, že OG doplněk podprostoru tvoří podprostor.

   [3 body]

2. (a) Definujte $\mathbb{A}$-skalární součin.
   (b) Uveďte axiom skalárního součinu, který je pro $\mathbb{A}$-skalární součin splněn díky hermitovskosti matice $\mathbb{A}$.
   (c) Spočtěte normu vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je-li v $\mathbb{R}^4$ definován $\mathbb{A}$-skalární součin stejně jako v bodě (b) příkladu 4.

   [3 body]

3. (a) Vyslovte Cramerovo pravidlo.
   (b) V čem je výhodné a v čem nevýhodné oproti Gaussově eliminaci?
   (c) Co víte o determinantu následujících matic z $\mathbb{C}^{n,n}$ (uveďte nejpřesnější možné tvrzení):
      i. horní trojúhelníková matice,
      ii. regulární matice,
      iii. pozitivně definitní matice,
      iv. hermitovská matice,
      v. ortogonální matice,
      vi. matice ze samých jedniček.

   [3 body]

Hodnocení

K výsledku praktické části jsou nejprve přičteny plusové body u těch z vás, kteří získali během semestru přes 35 bodů (za každý bod navíc je přičten 1 bod), a poté je aplikováno následující hodnocení:

1. Máte-li z nějakého příkladu či nějaké teoretického okruhu 0 bodů, pak okamžitě hodnocení F.
2. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
3. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
4. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
5. Kdo získá ≥ 19 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.