

Zkoušková písemka LAP 30.5.2012

Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až drobné numerické chyby).

1. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ zadaný maticí ve standardních bázích

$$\varepsilon_A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dále je definována hermitovská forma

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A symetrický operátor na prostoru \mathbb{R}^3 se skalárním součinem h ?

2. Necht W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském \mathbb{R}^3 (tedy se standardním skalárním součinem).

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x + y = 1.$$

Najděte parametrické rovnice všech rovin W , pro které platí:

- (a) W je rovnoběžná s W_1 ,
- (b) W svírá s W_2 úhel $\frac{\pi}{4}$,
- (c) vzdálenost W od bodu $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ je rovna 2.

3. Necht Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^3 , kde

$$Q(\vec{x}) = 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Najděte bázi \mathcal{A} prostoru \mathbb{R}^3 tak, aby

$${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$