Zkoušková písemka LAP 22.6.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až drobné numerické chyby).

1. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor (tedy se standardním skalárním součinem). Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, A je symetrický, $\det A = 8$ a $A(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$ a nechť existuje $\alpha \in \sigma(A)$ takové, že $\nu_a(\alpha) = 2$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

2. Nechť v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$$
pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right)$ jsou dány podprostory
$$P \equiv 2x - y = 0 \qquad Q \equiv \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}.$$
Sestavte ${}^{\mathcal{E}}(A_P{}^*)$, je-li A_P projektor na P podle Q.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.
$$Q(\vec{x}) = \alpha x_1x_2 + x_1x_3 - \alpha x_2x_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)$. Určete $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby existovala báze $\mathcal{A}$, pro niž platí ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
V takovém případě bázi $\mathcal{A}$ najděte.