

Zkoušková písemka LAP 14.6.2012

Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až drobné numerické chyby).

1. Nechtě je v \mathbb{R}^3 definován skalární součin

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Nechtě $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ je symetrický operátor, pro který platí $\det A = 4$ a $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

2. Nechtě v prostoru \mathbb{R}^3 se skalárním součinem definovaným

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ je dána lineární varieta $W = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\alpha}$. Nalezněte neparаметrické rovnice všech rovin, které svírají s W úhel $\frac{\pi}{2}$ a od bodu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mají vzdálenost $\sqrt{3}$.

3. Nechtě Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^3 .

$${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete

- (a) signaturu Q ,
- (b) polární bázi Q ,
- (c) nulprostor Q .