Zkoušková písemka LAP 13.6.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ definovaný pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$ jako
$$Ax(t) = x(t+1) - 2x(t).$$
Nechť $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$y_1(t) = t^2 + t - 1,\ y_2(t) = t^2 - t,\ y_3(t) = -t^2.$$
   (a) Je A regulární operátor? Pokud ano, najděte ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$.
   (b) V $\mathcal{P}_3$ je definovaný skalární součin $\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2}$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$. Při takovém skalárním součinu najděte ${}^{\mathcal{Y}}(A^*)$.

2. Nechť v prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$
pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ je dána lineární varieta $W \equiv x - y + z = 2$ a body $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ve W najděte všechny body, které mají od bodů $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ stejnou vzdálenost. Tuto vzdálenost určete.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.
$$Q(\vec{x}) = (7\alpha - \alpha^2 - 7)x_1^2 - x_2^2 + (1-\alpha^2)x_3^2 + (2-2\alpha)x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3 + 2\alpha^2 x_1x_3,$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ určete signaturu.
   (b) Je-li Q singulární, najděte polární bázi Q.