Zkoušková písemka LAA 10.9.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ je zadaný
$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný?

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\lambda$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_4 - x_3y_2 - x_2y_3$ pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Najděte
   (a) $P^\perp$, tedy OG doplněk P do $\mathbb{R}^4$,
   (b) OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ do P, tedy $\vec{x}_P$,
   (c) vzdálenost bodu $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ od P, tedy $\rho(\vec{x}, P)$.

3. Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$. Nechť $^{\mathcal{X}}h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \beta & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte
   (a) signaturu diagonály Q v závislosti na parametru β,
   (b) nulprostor h v závislosti na parametru β,
   (c) $\beta \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ byl vektor z nulprostoru h.