Zkoušková písemka LAP 8.6.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až drobné numerické chyby).

1. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P \equiv x - 2y + z = 0$, nechť $Q_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ a $Q_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

   kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Najděte ON bázi

   (a) $Q_1^\perp$ do P,

   (b) $Q_2^\perp$ do P.

2. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, tj. se standardním skalárním součinem. Určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje ortogonální $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ takový, že

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A \text{ je diagonalizovatelný.}$$

   Pro takové operátory najděte ${}^{\mathcal{E}}A$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$. Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte

   (a) signaturu Q,

   (b) polární bázi Q,

   (c) nulprostor přidružené poláry.