Zkoušková písemka LAP 6.9.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ splňuje
$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-\alpha & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
kde $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^4$
$$\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$
Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný? Pro takové případy najděte diagonální bázi, tedy bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$, pro kterou platí, že $^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice. Napište, čemu je rovno $^{\mathcal{Y}}A$.

2. Určete vzdálenost bodu $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem
   (a) od úsečky $u = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\kappa$,
   (b) od přímky $p = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\alpha$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^4$. Nechť $^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte
   (a) signaturu Q v závislosti na parametru α,
   (b) polární bázi $\mathcal{A}$ kvadratické formy Q v závislosti na parametru α,
   (c) nulprostor Q v závislosti na parametru α.