Zkoušková písemka LAP 6.6.2012 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až drobné numerické chyby).

1. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3,$$
pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Nechť
$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}]_\alpha \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x + y = 1.$$
Najděte parametrické rovnice všech rovin W, pro které platí všechny 3 následující podmínky:
   (a) W je rovnoběžná s W_1,
   (b) W svírá s W_2 úhel $\frac{\pi}{4}$,
   (c) vzdálenost W od bodu $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ je rovna $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0\}$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_4y_4 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_4 - x_4y_3$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.
Najděte ON bázi P
   (a) Gramovým-Schmidtovým OG procesem,
   (b) jiným způsobem.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ je báze $\mathbb{R}^3$.
Nechť ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$. Najděte
   (a) signaturu Q v závislosti na parametru α,
   (b) polární bázi $\mathcal{A}$ v závislosti na parametru α (najděte přímo složky vektorů) takovou, že
      i. ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
      ii. ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
      iii. ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,