

Zkoušková písemka LAP 4.9.2012

Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ splňuje

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

kde \mathcal{X} , \mathcal{Y} jsou báze \mathbb{R}^3

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Je A^{-1} diagonalizovatelný? Pokud ano, najděte diagonální bázi \mathcal{Z} , tedy bázi, v níž platí, že ${}^{\mathcal{Z}}(A^{-1})$ je diagonální matice. Napište, čemu je rovno ${}^{\mathcal{Z}}(A^{-1})$.

2. Necht W_1, W_2 jsou lineární variety v \mathbb{R}^3 se standardním skalárním součinem,

$$W_1 \equiv \begin{matrix} 2x & + & y & - & z & = & -3 \\ x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{matrix} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x - y = 0.$$

Najděte normálové (neparametrické) rovnice všech přímek, které prochází bodem $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, svírají s W_1 úhel $\frac{\pi}{2}$ a s W_2 úhel $\frac{\pi}{6}$.

3. Necht Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^3 . Necht $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze \mathbb{R}^3 .

Necht $Q(\vec{x}) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ splňující $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Najděte

(a) signaturu Q ,

(b) polární bázi \mathcal{A} takovou, že

i. ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

ii. ${}^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) nulprostor Q .