3. cvičení - Permutace a determinanty

Z teorie je třeba znát pojmy permutace, transpozice, inverze v permutaci, znaménko permutace, determinant matice. Dále je potřeba znát Sarrusovo pravidlo, determinant dolní a horní trojúhelníkové matice (a vědět, jak sloupcové, respektive řádkové úpravy, kterými matici převádíme na trojúhelníkovou, mění determinant), determinant součinu matic, determinant inverzní matice, rozvoj determinantu podle sloupce či řádku, výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované, Cramerovo pravidlo.

1. Určete znaménko následujících permutací.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

2. Dokažte přes počet inverzí, že transpozice je lichá permutace.

3. Určete složenou permutaci $\pi_1 \circ \pi_2$ a $\pi_2 \circ \pi_1$, je-li: $\pi_1 = (5\ 3\ 2\ 4\ 1)$ a $\pi_2 = (2\ 4\ 5\ 1\ 3)$.

4. Určete inverzní permutaci k $(4\ 1\ 5\ 2\ 3)$.

5. Zjistěte, které z následujících součinů (případně opatřené znaménkem mínus) jsou členy determinantu $\mathbb{A} = (a_{ij})$ příslušného řádu.

   (a) $a_{42}a_{64}a_{11}a_{53}a_{26}a_{35}$

   (b) $a_{72}a_{31}a_{25}a_{43}a_{52}a_{16}a_{64}$

   (c) $a_{23}a_{34}a_{17}a_{65}a_{72}a_{41}$

   (d) $a_{11}a_{2n}a_{3(n-1)}\dots a_{n2}$

6. Určete čísla i a k tak, aby součin $a_{53}a_{61}a_{16}a_{i2}a_{45}a_{k4}$ byl členem determinantu 6. řádu.

7. Spočtěte $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

   (a) Sarrusovým pravidlem,

   (b) převedením na horní trojúhelníkový tvar řádkovými (sloupcovými) úpravami,

   (c) rozvojem podle zvoleného řádku (sloupce).

8. Dvěma způsoby spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

   Přesvědčte se, že Sarrusovo pravidlo v tomto případě použít nelze.

9. Spočtěte $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

10. Spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$.

11. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte z definice i přerovnáním řádků determinant matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Spočtěte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$

13. Sloupcovými úpravami, respektive pomocí $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$, spočtěte

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ & & \dots & \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

14. Dokažte, že $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1,$ kde n je řád matice.

15.
- Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 6 \end{array}$$

- Spočtěte pomocí vzorce $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

- Zkontrolujte, zda jste řešili soustavu správně, tj. zda pro nalezené řešení $\vec{x}$ platí $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

16. Spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

17. Pro $n \geq 2$ spočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

18. Spočtěte determinant pomocí vztahu $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$ nebo pomocí sloupcových úprav

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

19. Dokažte, že

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{pro } \alpha = \beta, \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{pro } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

20. Nechť je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gaussovy eliminace.
- Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{31}$ pomocí adjungované matice.

21. Spočtěte $\det(\mathbb{A}^{adj})$.

22. Nechť jsou dány $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Najděte $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}$ pro ta z $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která existuje.

(b) Pro $\alpha = 1/4$ najděte 3. složku řešení (tj. x_3) $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1})\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pomocí Cramerova pravidla.

23. Nechť je dána matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ neznáme.)

(a) Z následujících matic vypočtěte všechny ty, které lze na základě zadaných údajů získat: $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}^{-1}$, $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}$, $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T$.

(b) Dále spočtěte determinant $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$ a determinanty všech Vámi spočtených matic.

24. Nechť n je sudé číslo, m je liché číslo, $n, m \in \mathbb{N}$. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ typu $(n+m)\times(n+m)$ a najděte $\mathbb{A}^{-1}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{m-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Nechť je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gaussovy eliminace.
- Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{31}$ pomocí adjungované matice (uveďte obecně vzorce, které používáte).

26. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu LAR

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

Výsledky: Permutace a determinanty

1. (a) počet inverzí 8 $\Longrightarrow$ sudá permutace

   (b) počet inverzí $\frac{n(n+1)}{2}$ $\Longrightarrow$ permutace sudá pro přirozená n tvaru $n = 4k$ a $n = 4k+1$ a lichá pro přirozená n tvaru $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$, kde $n \in \mathbb{N}_0$

2. počet inverzí je $2(j-i-1)+1$

3. $\pi_1 \circ \pi_2 =$(3 4 1 5 2), $\pi_2 \circ \pi_1 =$(3 5 4 1 2)

4. $\pi^{-1} =$(2 4 5 1 3)

5. (a) počet inverzí 7 $\Longrightarrow$ přidat znaménko -

   (b) není člen determinantu (vystupují dva prvky matice ze stejného sloupce a_{72} a a_{52})

   (c) není člen (je zde jen 6 prvků matice 7. řádu)

   (d) může být členem, ale v případě, že n je přirozené číslo tvaru $n = 4k$ a $n = 4k+3$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, je třeba přidat znaménko -

6. v úvahu připadá jen volba $i = 2 \wedge k = 3$ nebo $i = 3 \wedge k = 2$. Pro $i = 2 \wedge k = 3$ je počet inverzí 11 a tedy člen to není $\Longrightarrow$ v druhém případě to člen je, neboť zde je jen jedna transpozice navíc

7. hodnota determinantu je 49
8. hodnota determinantu je 24
9. vuyxz
10. $(1-x)^{n-1}$
11. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$
12. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$
13. hodnota determinantu je $a_1 + b_1$ pro $n = 1$, $(a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$ pro $n = 2$ a 0 pro $n > 2$
14.
15. řešení soustavy je $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
16. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$
17. $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} 2(n-2)!$
18. $\begin{cases} 0 & \text{pro } n > 2 \\ 1 + x_1 y_1 & \text{pro } n = 1 \\ (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) & \text{pro } n = 2 \end{cases}$