RSA

L'ubomíra Balková

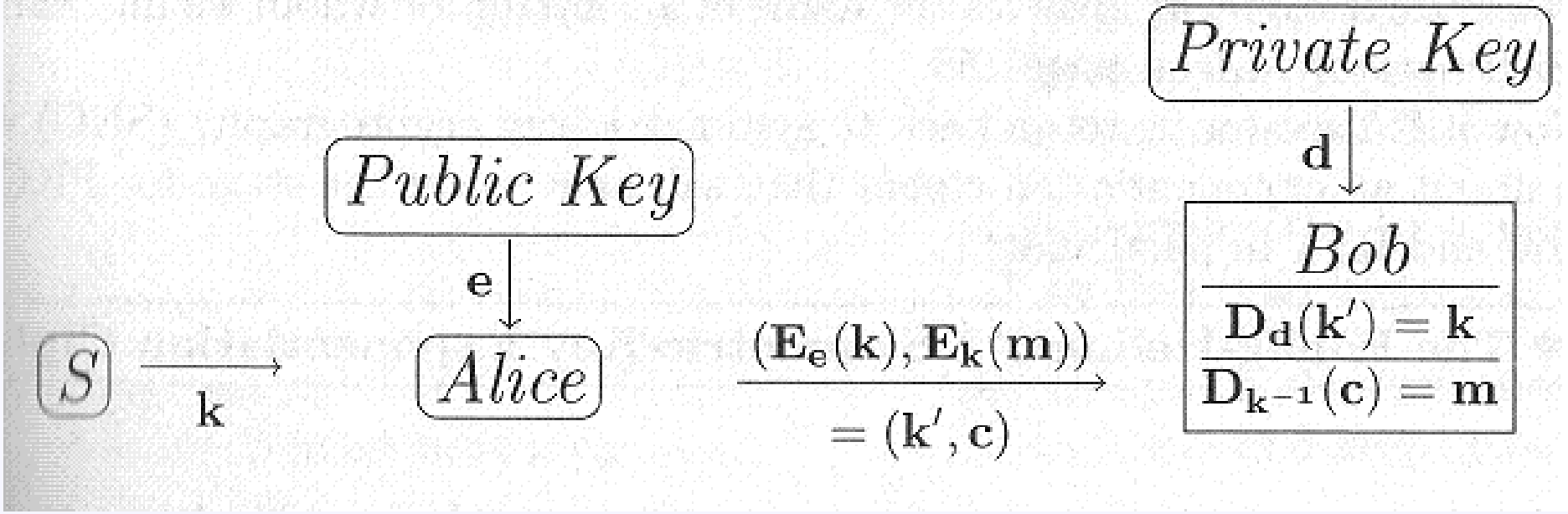
Úvod do kryptologie

4. dubna 2011

PKC Public Key Cryptography $\times$ SKC Secret Key Cryptography

- jen příjemce tajný soukromý klíč $\times$ příjemce a odesílatel sdílí tajný klíč
- pro komunikaci n osob stačí n klíčů $\times$ každý odesílatel $n-1$ klíčů
- výpočetní náročnost: RSA 1000krát pomalejší než DES
- velikost klíčů RSA 1024 bitů, DES 64 bitů
- délka života klíčů: RSA opakované užití, DES jednorázové
- užití pro výměnu tajných klíčů symetrické kryptografie: *hybridní kryptosystémy*

Diagram 4.2 Digital Envelope — Hybrid Cryptosystem



- 1978 - Rivest, Shamir, Adleman: *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*

- 1978 - Rivest, Shamir, Adleman: *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*
- šifra založena na Eulerově-Fermatově větě: Nechť $a, n \in \mathbb{N}, \gcd(a, n) = 1$, pak

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

- 1978 - Rivest, Shamir, Adleman: *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*
- šifra založena na Eulerově-Fermatově větě: Nechť $a, n \in \mathbb{N}, \gcd(a, n) = 1$, pak

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

- princip asymetrické kryptografie: Bob vlastní trezor, který je otevřený,

- 1978 - Rivest, Shamir, Adleman: *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*
- šifra založena na Eulerově-Fermatově větě: Nechť $a, n \in \mathbb{N}, \gcd(a, n) = 1$, pak

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

- princip asymetrické kryptografie: Bob vlastní trezor, který je otevřený, Alice (stejně jako každý jiný) v něm může nechat zprávu a zaklapnout dvířka,

- 1978 - Rivest, Shamir, Adleman: *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*
- šifra založena na Eulerově-Fermatově větě: Nechť $a, n \in \mathbb{N}, \gcd(a, n) = 1$, pak

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

- princip asymetrické kryptografie: Bob vlastní trezor, který je otevřený, Alice (stejně jako každý jiný) v něm může nechat zprávu a zaklapnout dvířka, ta otevře jen Bob - jediný vlastník klíče

1. generování klíče
   - Bob generuje velká $p, q \in \mathbb{P}$, $n := pq$ ... *modul RSA*
   - zvolí $1 < e < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ a $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
   - Eukleidovým algoritmem najde jediné $1 < d < \varphi(n)$... *soukromý klíč*

$$ed \equiv 1 \mod \varphi(n)$$

   - zveřejní (n, e) ... *veřejný klíč*

1. generování klíče
   - Bob generuje velká $p, q \in \mathbb{P}$, $n := pq$ ... *modul RSA*
   - zvolí $1 < e < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ a $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
   - Eukleidovým algoritmem najde jediné $1 < d < \varphi(n)$... *soukromý klíč*

$$ed \equiv 1 \mod \varphi(n)$$

   - zveřejní (n, e) ... *veřejný klíč*
2. šifrování
   - Alice vyhledá v databázi Bobův klíč (n, e)
   - zašifruje $m < n$ a $\gcd(m, n) = 1$
   - odešle

$$c \equiv m^e \mod n$$

   (spočte pomocí "square and multiply")

1. generování klíče
   - Bob generuje velká $p, q \in \mathbb{P}$, $n := pq$ ... *modul RSA*
   - zvolí $1 < e < \varphi(n) = (p-1)(q-1)$ a $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$
   - Eukleidovým algoritmem najde jediné $1 < d < \varphi(n)$... *soukromý klíč*

$$ed \equiv 1 \mod \varphi(n)$$

   - zveřejní (n, e) ... *veřejný klíč*
2. šifrování
   - Alice vyhledá v databázi Bobův klíč (n, e)
   - zašifruje $m < n$ a $\gcd(m, n) = 1$
   - odešle

$$c \equiv m^e \mod n$$

   (spočte pomocí "square and multiply")
3. dešifrování
   - Bob spočte

$$m \equiv c^d \mod n$$

Kryptoanalýza je stejně obtížná jako prvočíselná faktorizace, tj. výpočet d je stejně obtížný jako faktorizace $n = pq$.

- ze znalosti $n = pq$ lze spočíst d
- jediný známý algoritmus pro hledání d z $ed \equiv 1 \mod \varphi(n)$ je Eukleidův, a k tomu je třeba znát $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, a tedy $n = pq$
- ze znalosti n a $\varphi(n)$ lze určit p, q

$$p + q = n - \varphi(n) + 1, \quad p - q = \sqrt{(p+q)^2 - 4n}$$

- délka bloku
  - $m < n$ (jinak ztracena info $\mod n$)
  - najdeme l : $2^l < n < 2^{l+1}$
  - sekáme m na bloky délky l, poslední případně doplníme nulami
- velikost modulu 1024 až 4096 bitů
  - RSA challenge number - moduly, na jejichž faktorizaci vypsána odměna
  - challenge-rsa-list@rsa.com

Čeho se vyvarovat:

- p, q blízko sebe, tj. $\frac{p+q}{2}$ o málo $> \sqrt{n}$
  - $$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - n = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$$
  - $x > \sqrt{n}, x \in \mathbb{N}$, dokud neplatí $x^2 - n = y^2$
  - pak $n = (x-y)(x+y)$

Příklad

$n = 14755801$, pak $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 3841$, testujeme $3842, 3843, 3844$, pro 3845 máme $3845^2 - 14755801 = 168^2$, a tedy
$n = (3845 - 168)(3845 + 168) = 3677 \cdot 4013$.

Čeho se vyvarovat:

- velký $\gcd(p-1, q-1)$
  - stačí najít d tak, že $ed \equiv 1 \mod \operatorname{lcm}(p-1, q-1)$

Příklad

$p = 23, q = 67, e = 5$, *pak* $22 = gcd(p-1, q-1)$, *stačí najít* d *tak, že*

$$5d \equiv 1 \mod 66,$$

a tedy $d = 53$.

Řešení problému: volit p, q tak, aby $\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2} \in \mathbb{P}$ (tzv. *safe primes*)

Běžná volba: $e = 65537$, elektronické platební karty $e = 3$

- výhoda - rychlé šifrování a ověřování podpisu
- nevýhoda - útok na zprávy bez formátování

- útočník zachytí $c_1 \equiv m^3 \mod n_1$, $c_2 \equiv m^3 \mod n_2$, $c_3 \equiv m^3 \mod n_3$, z čínské zbytkové věty spočte

$$c \equiv m^3 \mod n_1 n_2 n_3 = m^3$$

- útočník zachytí $c_1 \equiv m^3 \mod n_1$, $c_2 \equiv m^3 \mod n_2$, $c_3 \equiv m^3 \mod n_3$, z čínské zbytkové věty spočte

$$c \equiv m^3 \mod n_1 n_2 n_3 = m^3$$

- Coppersmithův algoritmus: umí najít kořeny $m < n^{1/3}$ pro

$$p(x) = (x^3 - c) \mod n,$$

tedy pro $n = 1024$ bitů lze luštit zprávy délky 341 bitů

- kódovací a dekódovací transformace ψ a ψ^{-1}
- šifrování: $m = \psi(M),\ c \equiv m^e \mod n$
- dešifrování: $m \equiv c^d \mod n,\ M = \psi^{-1}(m)$
- mezinárodní standard *PKCS#1*
  - pro šifrování: EME-PKCS1-v1.5 ($\psi(M) = 00||02||PS||00||M$), EME-OAEP
  - pro podpis: EMSA-PKCS1-v1.5 ($\psi(M) = 00||01||FF \ldots FF||00||ID_h||h(M)$), EMSA-PSS

Mallory "hraje" Boba

- Bob posílá veřejný klíč (n, e) Alici
- zachytí jej Mallory a pošle Alici klíč (n', e')
- Alice pošle Bobovi $c' = m^{e'} \mod n'$
- Mallory přečte $m = c'^{d'} \mod n'$
- Bobovi pošle $m^e \mod n$
- Bob ani Alice nic netuší

Alice podepíše m a Bob podpis ověří:

- podepisovací fáze
  - Alice spočte $s \equiv m^d \mod n$ a pošle Bobovi
- ověřovací fáze
  - Bob obdrží veřejný klíč Alice (n, e) a podpis s
  - spočte $m \equiv s^e \mod n$