Zkoušková písemka 30.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta x & + & y & & & & & = & \beta \\ & & \beta y & + & z & & & = & 1 \\ & & & & \beta z & + & u & = & 0 \\ x & & & & & + & \beta u & = & 0 \end{array}.$$

   [4 body]

2. (a) Pro jaká $\beta \in \mathbb{R}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$?
   (b) BONUS za 1 bod: Pro taková β najděte $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací.
   (c) $[\mathbb{A}^{-1}]_{24}$ najděte také pomocí algebraických doplňků (ať je vidět, jaký vzorec používáte).
   (d) Spočtěte $[\mathbb{A}^{-1}\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)]_3$ pomocí Cramerova pravidla (ať je vidět, jaký vzorec používáte).

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a jim příslušné LN vlastní vektory matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Jsou si tyto matice podobné? Vysvětlete.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Najděte ortonormální (ON) bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a\\b\\c\\d\end{smallmatrix}\right) \mid 3a + 2b - 3c + 2d = 0 \right\}$ pomocí Gramova-Schmidtova OG procesu (nevíte-li si rady, pak nějakým jiným způsobem za 2 body).
   [4 body]

5. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně $W_1 = \left\{ \alpha \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \mid \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ a $W_2 = [\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)]_\alpha$. Určete
   (a) jakými varietami jsou W_1 a W_2,
   (b) normálové rovnice W_2,
   (c) průnik $W_1 \cap W_2$,
   (d) vzájemnou polohu W_1 a W_2.

   [4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Vyslovte větu, v jejímž důkazu se objevuje Gramův-Schmidtův OG proces.
   (b) Gramův-Schmidtův OG proces popište.

   [3 body]

2. (a) Definujte vlastní čísla a charakteristický polynom matice. Jaký je mezi nimi vztah?
   (b) Definujte podobnost matic.
   (c) Co platí pro vlastní čísla a charakteristické polynomy podobných matic?
   (d) Tvrzení o charakteristických polynomech dokažte.

   [3 body]

3. (a) Definujte konvexní obal a afinní obal.
   (b) Platí $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\alpha \subset [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\kappa$ nebo $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\kappa \subset [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\alpha$? Vysvětlete.
   (c) Co je průnikem konvexních obalů, je-li neprázdný?
      i. konvexní množina,
      ii. lineární varieta.

      Vyberte správnou odpověď (odpovědi). U správné vysvětlete, z jakých vět plyne, u nesprávné uveďte protipříklad.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.