Zkoušková písemka 30.5.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte řešení soustavy LAR
$$\begin{array}{rcrcrcr} \beta^2 x & + & (\beta^2-\beta)y & + & \beta^2 z & = & \beta^2+\beta \\ (\beta+1)x & + & (\beta-1)y & + & (\beta-1)z & = & \beta+1 \\ (\beta-1)x & + & (\beta+1)y & + & (\beta-1)z & = & \beta+1 \end{array}.$$
[4 body]

2. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&1&1 \\ 0&0&1&1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \alpha & (2-\alpha) & (\alpha-1) & (2-\alpha) \\ 0 & \alpha & (1-\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Určete, pro jaká α mají řešení následující úlohy. Pro taková α je vyřešte.
   (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$.
   (b) Najděte $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ dvěma různými způsoby.
   (c) $[\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}]_{34}$ najděte i pomocí algebraického doplňku (z postupu ať je zřejmé, jaký vzorec používáte).

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a jim příslušné LN vlastní vektory matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$. (Nápověda: úlohu pro $\mathbb{A}^{-1}$ lze vyřešit i bez počítání ze znalosti výsledku pro $\mathbb{A}$.)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 2i & 1 & -2i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$
[4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = [\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}]_\lambda$.
   (a) Najděte $P^\perp$.
   (b) Najděte OG průmět vektoru $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix}$ do P.
   (c) Určete vzdálenost $\vec{a}$ od P.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:
W_1 je rovina procházející bodem $\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$ a rovnoběžná s rovinou $W_3 \equiv \begin{array}{rcr} x & = & 1+t-s \\ y & = & t-s \\ z & = & -t-s \\ u & = & 1-t+s \end{array}$
a $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & u & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & u & = & -1 \\ x & + & y & & & & & = & -1 \end{array}.$
   (a) Najděte zápis W_1 pomocí afinního obalu.
   (b) Určete, jakou lineární varietou je W_2.
   (c) Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

BONUS za 1 bod: V zápisu W_1 jako afinního obalu nahraďte α písmenem κ. Zůstane průnik $W_1 \cap W_2$ stejný?

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s patřičnými předpoklady.

1. (a) Definujte charakteristický polynom.
   (b) Jaký je jeho stupeň?
   (c) Jaký je koeficient u členu s nejvyšším stupněm?
   (d) Jaký je koeficient u konstantního členu?
   (e) Jaký platí vztah mezi vlastními čísly a charakteristickým polynomem?
   (f) Doplňte správně následující tvrzení (a vysvětlete, proč jde o správné tvrzení): Je-li $p_{\mathbb{A}}(t) = (1-t)^3$ a $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná, pak je matice $\mathbb{A} = \dots$

   [3 body]

2. (a) Definujte OG matici dvěma různými ekvivalentními způsoby.
   (b) Co platí pro součin OG matic? Tvrzení dokažte.
   (c) Který z následujících argumentů je pravdivý. Vysvětlete nebo uveďte protipříklad!
      i. Nechť $\mathbb{A}$ je OG matice. Jelikož pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $|\lambda| = 1$, plyne odtud, že $\det\mathbb{A} = \pm 1$.
      ii. Nechť $\mathbb{A}$ je OG matice. Jelikož $|\det\mathbb{A}| = 1$, plyne odtud, že pro všechna vlastní čísla $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí $\lambda = \pm 1$.

   [3 body]

3. (a) Definujte konvexní množinu a lineární varietu (vysvětlete i pojmy z lineární geometrie, které v definici použijete).
   (b) Jaké znáte typy lineárních variet v $\mathbb{R}^3$ (jsou 4 různé)?
   (c) Co platí pro průnik konvexní množiny a lineární variety? Tvrzení dokažte. (Pokud nevíte, vyslovte a dokažte tvrzení o průniku lineárních variet.)

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13-14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15-16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17-18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19-20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.