Zkoušková písemka 27.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte
   (a) $\ker A$,
   (b) určete, kdy je A regulární operátor,
   (c) v případě, kdy A není regulární, najděte $A^{-1}(\vec{b})$, kde $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definované pomocí své matice v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{E}_3$
   $$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$
   [4 body]

2. Nechť $\mathbb{A}$ je řádu $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Najděte
   (a) $\mathbb{A}^{-1}$ úplnou Gaussovou eliminací,
   (b) pomocí algebraických doplňků $[\mathbb{A}^{-1}]_{23}$ (ať je vidět, jaký vzorec používáte).
   (c) pomocí Cramerova pravidla $[\mathbb{A}^{-1}\vec{b}]_3$ (ať je vidět, jaký vzorec používáte).
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 5$ (za poloviční počet bodů).
   [4 body]

3. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ má $\mathbb{A}$ násobné vlastní číslo, tj. s algebraickou násobností > 1? V takových případech najděte vlastní čísla a jim příslušné LN vlastní vektory a určete, zda je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$
   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a + b = 0,\ c = 0 \right\}$. Najděte
   $$(a)\ P^{\perp} \text{ do } \mathbb{R}^3, \qquad (b) \text{ OG průmět vektoru } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ do } P,$$
   - je-li v $\mathbb{R}^3$ zadán standardní skalární součin,
   - je-li v $\mathbb{R}^3$ zadán $\mathbb{A}$-skalární součin s maticí $\mathbb{A}$ z příkladu 3., kde jsme zvolili $\alpha = 2$.

   [4 body]

5. Nechť W je rovina rovnoběžná s W_1 i W_2 a obsahující bod $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & 2z & - & u & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & - & 2u & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & 0 \end{array} \text{ a } W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}. \text{ Určete}$$

(a) průnik $W_1 \cap W_2$,
(b) jakými varietami jsou W_1 a W_2,
(c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,
(d) normálové rovnice W.

[4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte OG doplněk P podprostoru V a OG průmět vektoru.
   (b) Vysvětlete, co znamená, že direktní součet P a jeho doplňku je roven V.
   (c) Jak pomocí OG průmětu počítáme vzdálenost bodu od podprostoru?

   [3 body]

2. (a) Definujte regulární lineární operátor.
   (b) Definujte regulární matici.
   (c) Jak souvisí regularita matice a regularita lineárního operátoru?
   (d) Jak lze definovat regularitu matice pomocí
      i. vlastních čísel,
      ii. determinantu,
      iii. řešení homogenní soustavy (vysvětlete užitím Frobeniovy věty).

   [3 body]

3. (a) Definujte pozitivně definitní matici.
   (b) Co víte o vlastních číslech PD matic? Tvrzení dokažte!
   (c) Jak zní Sylvesterovo kritérium pro ověřování PD matic (vyslovte jej ve formě ekvivalence).
   (d) Je-li $\mathbb{A}$ PD matice a $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$, je pak $\mathbb{B}$ také PD? Dokažte nebo uveďte protipříklad.
   (e) Jsou-li $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ PD, je také $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ PD? Dokažte nebo uveďte protipříklad.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.