Zkoušková písemka 23.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte
   (a) $\ker A$,
   (b) $A^{-1}(\vec{b})$, kde $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,
   (c) BONUS za 1 bod: A^{-1} (pozor, jde o operátor, ne o matici), existuje-li,

   je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definované pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ jako
   $$A\vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \quad \text{a} \quad \mathcal{X} = \left(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right).$$
   [4 body]

2. Nechť n je sudé číslo, m je liché číslo, $n, m \in \mathbb{N}$. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$
   (a) záměnou řádků,
   (b) opakovaným rozvojem podle řádků.

   Matice $\mathbb{A}$ je typu $(n+m) \times (n+m)$ a je definována:
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{1} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{m-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m} \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \mathbf{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{n} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$
   Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 4$ a $m = 3$.
   [4 body]

3. (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ má $\mathbb{A}$ stejná vlastní čísla jako $\mathbb{B}$?
   (b) Pro taková α najděte LN vlastní vektory příslušné vlastním číslům.
   (c) Je v takovém případě $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$? Zdůvodněte.
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   [4 body]

4. Nechť $P, Q_1, Q_2 \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor.
   $$P = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)]_\lambda, \quad Q_1 = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)]_\lambda, \quad Q_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{smallmatrix}\right) \mid a + b = 0,\ c + d = 0 \right\}.$$
   Najděte
   $$(a)\ P^\perp \text{ do } \mathbb{R}^4, \qquad (b)\ Q_1^\perp \text{ do } P, \qquad (c)\ Q_2^\perp \text{ do } P.$$
   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$W_1 \equiv \begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & 2z & - & u & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & - & 2u & = & 2 \end{array}$ a $W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}]_\alpha$. Určete

(a) o jaké variety jde,

(b) parametrické rovnice W_2,

(c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

(d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte determinant matice. (Vysvětlete ty z následujících pojmů, které v definici využijete: transpozice, inverze v permutaci, znaménko permutace.)
   (b) Jaký je vztah mezi det$\mathbb{A}$ a det$\mathbb{B}$, když $\mathbb{B}$ vznikla z $\mathbb{A}$ 1 ekvivalentní řádkovou úpravou.
   (c) S využitím Vašeho předchozího tvrzení vysvětlete,
   (i) zda EŘÚ zachovávají nenulovost determinantu.
   (ii) jaký je vztah mezi det$\mathbb{A}$ a det$(2\mathbb{A})$.

   [3 body]

2. (a) Definujte symetrickou matici.
   (b) Je-li $\mathbb{A}$ symetrická matice, doplňte, co speciálního lze říci o
   (i) $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{y} >= \dots,$ (ii) $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{x} >= \dots,$
   (iii) vlastních číslech $\mathbb{A}$, (iv) vlastních vektorech $\mathbb{A}$.
   Jedno z předchozích tvrzení dokažte!
   (c) Je $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ symetrická, pokud $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou? (Dokažte nebo uveďte protipříklad.)

   [3 body]

3. (a) Vyslovte Pythagorovu větu a rovnoběžníkovou rovnost.
   (b) Jak první souvisí s trojúhelníkem a druhá s rovnoběžníkem?
   (c) Jednu z nich dokažte.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.