Zkoušková písemka 15.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha > 0$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccc} (2\alpha+2)x & + & (\alpha^2+\alpha)y & + & (\alpha+1)z & = & -\alpha-1 \\ -\alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & \alpha y & + & z & = & -1 \end{array}.$$

   BONUS za 1 bod: Najděte všechna řešení i pro $\alpha \leq 0$.

   [4 body]

2. Nechť $\mathbb{A}$ je řádu $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \dots & 1 & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & \dots & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pro parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které existuje.

   (b) Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{12}$ i pomocí matice adjungované, tj. pomocí algebraických doplňků. (Z postupu ať je zřejmý vzorec, který používáte.)

   (c) Pro $\alpha = 1$ najděte $A^{-1}(\vec{b})$, kde $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, (pozor! A^{-1} značí v tomto případě vzor) pro $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Nevíte-li si rady obecně, řešte všechny úlohy pro $n = 5$.

   [4 body]

3. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte vlastní čísla $\mathbb{A}$ a ON bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů, existuje-li. Víte i bez počítání, zda bude existovat? Vysvětlete.

   [4 body]

4. Najděte ON bázi $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$ v $\mathbb{R}^4$ vybaveném $\mathbb{A}$-skalárním součinem, kde (a) $\mathbb{A} = \mathbb{I}$, (b) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\alpha, \quad W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

   (a) Určete, o jaké variety jde.

   (b) Najděte normálové rovnice W_2.

   (c) Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2.

   (d) Najděte průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. Z následujících matic vyberte

   (a) regulární

   (b) unitární

   (c) symetrické

   (d) pozitivně definitní

   a napište, co víte bez počítání o vlastních číslech regulárních, unitárních, symetrických a PD matic. Tvrzení o vlastních číslech PD matice dokažte.

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

   [3 body]

2. (a) Napište definici skalárního součinu.

   (b) Jak je definován $\mathbb{A}$-skalární součin a proč jde o skalární součin?

   (c) Jak je definován standardní skalární součin v $\mathbb{C}^3$?

   [3 body]

3. (a) Definujte konvexní množinu a konvexní obal (včetně pojmů z lineární geometrie, které se v definici objeví).

   (b) Je každý konvexní obal konvexní množinou?

   (c) Je každá konvexní množina konvexním obalem? Vysvětlete nebo uveďte protipříklad.

   (d) Je každý konvexní 4-úhelník v $\mathbb{R}^2$ konvexním obalem? Vysvětlete.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.