Zkoušková písemka 13.6.2011 Jméno:

Praxe

1. Nechť jsou dána dvě zobrazení A, B definována následovně: pro každé $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ a pro každé $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2-2a_3 \\ a_2-3a_3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_2 \\ a_1-4a_2 \end{pmatrix}.$$
Najděte vše, co existuje:
   (a) $\ker AB$,
   (b) $\ker BA$,
   (c) $(AB)^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$,
   (d) $(AB)^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   [4 body]

2. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pro parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které existuje.
   (b) Najděte $[\mathbb{A}^{-1}\vec{b}]_1$ (tj. první složku vektoru $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$) pomocí Cramerova pravidla.
   (c) Najděte $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ pro $\alpha = 2$ bez toho, abyste matice násobili.

   [4 body]

3. Nechť $\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Rozhodněte, pro jaké parametry $\beta \in \mathbb{C}$ je matice $\mathbb{A}$ (a) unitární, (b) hermitovská. V obou případech napište, co víte již předem o vlastních číslech. Až poté vlastní čísla najděte.
   BONUS za 1 bod: Najděte LN vlastní vektory v případě (a) či (b).
   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ je zaměřením variety $W \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & - & z & & & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$. Najděte
   (a) OG doplněk P do eukleidovského $\mathbb{R}^4$.
   (b) OG průmět $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ do P.
   (c) Určete vzdálenost $\vec{a}$ od P.
   (d) OG doplněk P do $\mathbb{R}^4$, je-li v $\mathbb{R}^4$ dán $\mathbb{A}$-skalární součin s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť $\beta \in \mathbb{R}$ a W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: $W_1 \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & - & 3z & + & 4u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$ a $W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}]_\alpha$. Určete v závislosti na β

(a) jakým typem variety je W_2,

(b) parametrické rovnice W_2,

(c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

(d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Vyslovte definici determinantu matice. Vysvětlete, včetně ilustrace na konkrétních příkladech, pojmy inverze v permutaci a znaménko permutace.

   (b) Odvoďte přímo z definice vzorec pro determinant matice rozměru 3×3.

   (c) Vyslovte Cramerovo pravidlo.

   [3 body]

2. (a) Platí, že každý podprostor je lineární varietou? Vysvětlete.

   (b) Je každá lineární varieta podprostorem? Vysvětlete.

   (c) Definujte vzdálenost dvou množin v $\mathbb{R}^n$.

   (d) Jak se vzorec zjednoduší pro vzdálenost dvou lineárních variet?

   (e) A jak spočtete vzdálenost bodu od podprostoru? Na obrázku v $\mathbb{R}^2$ ilustrujte, proč vzorec odpovídá geometrické představě.

   [3 body]

3. (a) Definujte normální matici a uveďte příklad takové matice.

   (b) Z jaké věty či z jakých vět plyne, že pro každou normální matici řádu n existuje v $\mathbb{C}^n$ ON báze z jejích vlastních vektorů?

   (c) Definujte unitární matici a uveďte alespoň 3 její vlastnosti. Některou z nich dokažte.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.