Zkoušková písemka 6.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha x & + & y & + & z & = & \beta \\ -x & + & \beta y & - & z & = & \alpha \\ x & + & y & + & z & = & \beta \end{array}.$$

[4 body]

2. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$ najděte ty z matic, které existují:

$$(a)\quad \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}, \qquad (b)\quad \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}, \qquad (c)\quad \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}, \qquad (d)\quad \mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}.$$

Dále spočtěte $[\mathbb{A}^{-1}]_{23}$ pomocí algebraických doplňků (tedy pomocí matice adjungované). Z výpočtu ať je zřejmé, jaký vzorec používáte.

[4 body]

3. Nechť $\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$. Rozhodněte o její diagonalizovatelnosti bez hledání ν_a a ν_g vlastních čísel. Vysvětlete. Dále uveďte, co víte bez počítání o vlastních číslech. Poté najděte vlastní čísla a k libovolnému jednomu z nich příslušné LN vlastní vektory.

BONUS za 1 bod: Najděte LN vlastní vektory ke všem vlastním číslům.

[4 body]

4. Nechť $P = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \end{array} \right\}$ a $Q = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a = 0 \right\}$.

   (a) Najděte OG doplněk P do eukleidovského $\mathbb{R}^4$.

   (b) Najděte OG doplněk P do Q v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$.

   (c) Najděte OG doplněk P do Q, je-li v $\mathbb{R}^4$ dán $\mathbb{A}$-skalární součin s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: W_1 je rovina rovnoběžná s $W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & + & u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$ a procházející bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a W_2 je nejmenší lineání varieta obsahující body $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Určete

   (a) jakým typem variety je W_2,

   (b) parametrické rovnice W_1,

   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie Všechna tvrzení uvádějte i s předpoklady!

1. (a) Definujte OG doplněk $P \subset\subset V$.
   (b) Dokažte, že OG doplněk tvoří podprostor.
   (c) Která z následujících implikací platí? Pokud některá neplatí, uveďte protipříklad.
      i. Je-li Q OG doplněk P do V, pak $V = P \oplus Q$.
      ii. Jsou-li $P, Q \subset\subset V$ takové, že $V = P \oplus Q$, pak Q je OG doplněk P do V.
   (d) Jsou-li $P, Q \subset\subset V$, vysvětlete, co znamená $V = P \oplus Q$.

   [3 body]

2. (a) Co říká Schwarzova-Cauchyova nerovnost?
   (b) Co říká trojúhelníková nerovnost?
   (c) Pro které z následujících dvojic vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ z unitárního prostoru $\mathbb{C}^3$ se nabývá rovnost ve Schwarzově-Cauchově nerovnosti? A pro které v trojúhelníkové nerovnosti? Vysvětlete nebo ověřte výpočtem.

$$(i)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,473 \\ -3,473 \\ 3,473i \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -6,946 \\ 6,946 \\ -6,946i \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,473 \\ -3,473 \\ 3,473i \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 6,946i \\ -6,946i \\ -6,946 \end{pmatrix}.$$

   (d) Jak je definován úhel mezi dvěma nenulovými vektory? Vysvětlete, že definice je korektní díky Schwarzově-Cauchyově nerovnosti.

   [3 body]

3. (a) Co znamená, že je matice $\mathbb{A}$ podobná diagonální matici?
   (b) Je každá čtvercová matice podobná diagonální matici? Vysvětlete nebo uveďte protipříklad.
   (c) Jaké matici je podobná každá čtvercová matice? (Nápověda: Podobnostní transformace je realizována unitární maticí.) Vyslovte příslušnou větu a definujte unitární matici.
   (d) Je-li $\mathbb{A}$ podobná matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathbb{B}$ podobná matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, je pak $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$? Vysvětlete.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.