Zkoušková písemka 5.9.2011 Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, kde

$$^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{E}} = (1, -1), \quad \mathcal{X} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right)$$

   a pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ platí $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte

   (a) $\ker A$,

   (b) všechna $\vec{x}$ taková, že $BA\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

   (c) všechna $\vec{x}$ taková, že $BA\vec{x} = 1$.

   [4 body]

2. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Matice $\mathbb{A}$ je definována: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte (pro parametry α, pro které mají smysl)

   (a) $\mathbb{A}^{-1}$,

   (b) $[\mathbb{A}^{-1}]_{42}$ pomocí matice adjungované (ať je z výpočtu poznat, jaký vzorec používáte).

   [4 body]

3. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ lze najít diagonální matici $\mathbb{D}$ a regulární matici $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$? Pro taková α matice $\mathbb{D}$ a $\mathbb{X}$ najděte.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{smallmatrix}\right) \mid \begin{array}{rcl} \alpha - \beta & = & 0 \\ \alpha - \gamma & = & 0 \end{array} \right\}$. Najděte

   (a) $P^{\perp}$, (b) ortonormální bázi $P^{\perp}$,

   (c) ortogonální průmět $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ do $P^{\perp}$ ((i) pomocí ON báze $P^{\perp}$, (ii) jiným způsobem).

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

   $W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ y - z & = & 0 \end{array}$ a W_2 je nejmenší lineární varieta obsahující body $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Zapište W_1 jako afinní obal.

   (b) Určete jakým typem variety je W_2.

   (c) Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2.

   (d) Najděte průnik $W_1 \cap W_2$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte konvexní obal a afinní obal. Platí mezi nimi nějaký vztah?
   (b) Je každá konvexní množina konvexním obalem nějakých vektorů? Vysvětlete.
   (c) Je každý konvexní obal konvexní množinou?
   (d) Namalujte $[\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\alpha$.
   (e) Namalujte $[\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\kappa$.

   [3 body]

2. U každé vlastnosti uveďte co nejširší třídu komplexních čtvercových matic $\mathbb{A}$ řádu n, která danou vlastnost má.
   (a) Existuje ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ z vlastních vektorů.
   (b) Determinant matice je různý od nuly.
   (c) Existuje unitární matice $\mathbb{U}$ a horní trojúhelníková matice $\mathbb{H}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{U}^H \mathbb{H} \mathbb{U}$.
   (d) Homogenní soustava s maticí $\mathbb{A}$ má nekonečně mnoho řešení.
   (e) Pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{x} > \in \mathbb{R}$.
   (f) Pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ platí $< \mathbb{A}\vec{x}, \vec{x} >$ je kladný.

   Všechny tyto třídy definujte, tj. je-li správnou odpovědí např. třída unitárních matic, pak definujte, co je unitární matice.

   [3 body]

3. (a) Definujte vlastní číslo, vlastní vektor a charakteristický polynom matice.
   (b) Jaký je vztah charakteristického polynomu a vlastních čísel matice?
   (c) Tvrzení dokažte.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.