Zkoušková písemka 1.9.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & (\alpha\cdot\beta)y & + & \beta z & = & (\alpha\cdot\beta) \\ -\alpha x & + & \beta y & - & \beta z & = & -(\alpha\cdot\beta) \\ \beta x & & & + & z & = & \alpha \end{array}.$$

   [4 body]

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Najděte

   (a) $\det \mathbb{A}$,

      i. z definice,

      ii. jiným způsobem,

   (b) $\mathbb{A}^{-1}$,

   (c) $\mathbb{A}^2$.

   Matice $\mathbb{A}$ je řádu n a je definována:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & \ldots & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \mathbf{2^2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \; \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \; \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{2^{n-1}} & 0 \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{2^n} & 0 & 0 \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

   Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 4$ a $n = 5$.

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a jim příslušné LN vlastní vektory matic

   (a) $\mathbb{A}$,

   (b) $\mathbb{A}^2$,

   je-li

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Najděte ortogonální bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \mid 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \}$, pokud

   (a) $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor,

   (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:
$W_1 = \{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right) \mid 2\alpha - \beta = 1 \}$, $W_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\alpha$. Určete

   (a) jakým typem variety je W_1,

   (b) parametrické rovnice W_2,

   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,

   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Definujte determinant matice.

   (b) Vysvětlete a na příkladech ilustrujte pojmy, které v definici použijete.

   (c) Jak vypadá vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované? Co z něj plyne pro determinant matice adjungované?

   [3 body]

2. (a) Definujte pozitivně definitní matici.

   (b) Vyslovte dvě další kritéria pro zjišťování, zda je matice PD.

   (c) Pro jaká n je PD matice z příkladu 2? Vysvětlete.

   (d) Je PD matice z příkladu 3? Vysvětlete.

   [3 body]

3. (a) Vyslovte Pythagorovu větu. V jakých prostorech platí jako ekvivalence?

   (b) Vyslovte trojúhelníkovou nerovnost. Jak souvisí s trojúhelníkem?

   (c) Jedno z tvrzení dokažte.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.