Zkoušková písemka 1.6.2011 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ najděte

   (a) $\ker A$,

   (b) $A^{-1}(\vec{b})$, kde $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

   je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadané pomocí své matice v bázi $\mathcal{X} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ a standardní bázi $\mathcal{E}$ prostoru $\mathbb{R}^2$

   $$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

2. Nechť n je sudé číslo, m je liché číslo, $n, m \in \mathbb{N}$. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$

   (a) záměnou řádků,

   (b) z definice.

   BONUS za 1 bod: Určete, kdy existuje $\mathbb{A}^{-1}$, a v takovém případě ji najděte.

   Matice $\mathbb{A}$ je typu $(n+m) \times (n+m)$ a je definována:

   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{a_n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{a_{n-1}} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \mathbf{a_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{a_1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{b_m} \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{b_{m-1}} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{b_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{b_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

   kde $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 2$ a $m = 3$.

   [4 body]

3. Najděte vlastní čísla a jim příslušné LN vlastní vektory $\mathbb{A}$. Jaká vlastní čísla má matice $\mathbb{B}$, která vznikne z $\mathbb{A}$ přičtením 2. řádku k 1. řádku.

   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor a $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

   Najděte ortogonální bázi P

(a) pomocí Gram-Schmidtova OG procesu,
(b) jiným způsobem.

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:
$W_1 \equiv x - 2y - 3z + 4u = 3$ a W_2 je přímka kolmá na W_1 a procházející bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Určete
   (a) jakým typem variety je W_1,
   (b) parametrické rovnice W_2,
   (c) vzájemnou polohu W_1 a W_2,
   (d) průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Definujte a vždy uveďte příklad:
      i. permutaci,
      ii. inverzi v permutaci,
      iii. transpozici.
   (b) Jakými způsoby lze spočíst znaménko permutace (uveďte 2 a ilustrujte je na příkladě)?

   [3 body]

2. (a) Vyslovte precizně větu, jejíž důkaz je založen na Gram-Schmidtově OG procesu.
   (b) Poté Gram-Schmidtův OG proces vysvětlete.

   [3 body]

3. (a) Definujte inverzní matici.
   (b) Co platí pro inverzní matici k součinu matic? Tvrzení dokažte.
   (c) Ekvivalentní řádkové úpravy matice $\mathbb{A}$ odpovídají násobení této matice nějakou maticí z jedné strany. Vyslovte větu, která toto popisuje.
   (d) Na základě předchozí věty vysvětlete, jak funguje úplná Gaussova eliminace pro výpočet $\mathbb{A}^{-1}$.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.