Zápisky z přednášek LAB2

Ľubomíra Balková

20. února 2011

Tyto zápisky budou průběžně doplňovány během celého letního semestru. Kompletní verze tedy bude k dispozici až koncem května 2011, a to jak na mých internetových stránkách, tak na Wiki Skriptech. Uvítám, když mi budete hlásit chyby, které při čtení najdete, abych je mohla průběžně opravovat.

Obsah

1 Matice a lineární zobrazení

Zatímco zimní semestr (dále jen ZS) byl zasvěcen lineárním zobrazením, o letním semestru se dá říci, že je věnován maticovému počtu. Cílem této kapitoly bude přesvědčit vás, jak úzce spolu pojem matice a lineární zobrazení souvisí, a dokonce ukázat, že v prostorech T^n matice a lineární zobrazení jedno jest.

Předpoklady: Uvažujeme výlučně vektorové prostory konečné dimenze a těleso vždy pouze reálné nebo komplexní, tj. $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

1.1 Lineárnímu zobrazení je přiřazena matice v bázích

To je fakt, který známe ze ZS. Připomeňme definici matice zobrazení v daných bázích.

Definice 1. *Pro lineární zobrazení $A : P \to Q$, pokud jsou dány báze $\mathcal{X}$ prostoru P nad T a $\mathcal{Y}$ prostoru Q nad T, definujeme matici A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jako*

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{\cdot j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}},$$

kde $()_{\cdot j}$ značí j-tý sloupec matice.

Příklad 1. *Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované následovně*

$$A \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{smallmatrix} \right) := \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} \right).$$

Najděte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{X} = (\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. (Uvědomte si, že jednou je $\vec{e}_1$ vektorem z $\mathbb{R}^2$ a podruhé z $\mathbb{R}^3$!)
Řešení: *Definice říká, že pro j-tý sloupec platí $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{\cdot j} = (A\vec{x}_j)_{\mathcal{Y}}$. Protože $A\vec{e}_2 = A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, tj. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)_{\mathcal{Y}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, máme určený první sloupec matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$. Podobně spočteme druhý a dostaneme výsledek.*
Výsledek:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Matici je přiřazeno lineární zobrazení

Následující věta říká, že také každé matici odpovídá lineární zobrazení a v určitém smyslu je jediné.

Věta 1. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T, nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad tělesem T (indexy vyjadřují dimenzi) a nechť $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $A : P_n \to Q_m$, jehož matice zobrazení v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ splňuje*

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}.$$

Takové zobrazení A nazýváme **zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$**.

Důkaz. Naznačíme, co je třeba dokázat.

1. Existenci:
   To znamená, že musíme definovat zobrazení, které splňuje podmínky z věty, tj.
   (a) $A : P_n \to Q_m$,
   (b) A je lineární,
   (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}$.

Ověřte sami, že když pro každé $\vec{x} \in P_n$ definujeme $A\vec{x}$ pomocí jeho souřadnic v bázi $\mathcal{Y}$ jako

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} := \mathbb{A} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{X}},$$

získáme zobrazení splňující výše uvedené tři požadavky.

2. Jednoznačnost:
Nechť $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$ splňuje ${}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \mathbb{A}$. Pak ze ZS víme, že pro každé $\vec{x} \in P_n$ platí

$$(B\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \mathbb{A}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}} = (A\vec{x})_{\mathcal{Y}}.$$

Pak ale pro každé $\vec{x} \in P_n$ také platí $A\vec{x} = B\vec{x}$, a tedy $A = B$.

□

Důsledek 1. *V příkladech bývá často zadáno lineární zobrazení pomocí své matice v bázích. Právě jsme se dozvěděli, že takové zadání skutečně určuje dané lineární zobrazení jednoznačně.*

1.3 Shrnutí

Jsou-li $\mathcal{X}$ báze P_n a $\mathcal{Y}$ báze Q_m. Pak

- každému lineárnímu zobrazení $A : P_n \to Q_m$ je přiřazena matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ typu $m \times n$,
- každé matici $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ je přiřazeno právě jedno lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

1.4 V prostorech T^n matice a lineární zobrazení jedno jest

Věta 2. *Nechť T je těleso.*

1. *Pro každé lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ existuje matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ s prvky z T, která splňuje $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každý vektor $\vec{x} \in T^n$.*
2. *Naopak, je-li $\mathbb{A}$ matice typu $m \times n$ s prvky z T, pak určuje vztahem $A\vec{x} := \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$.*

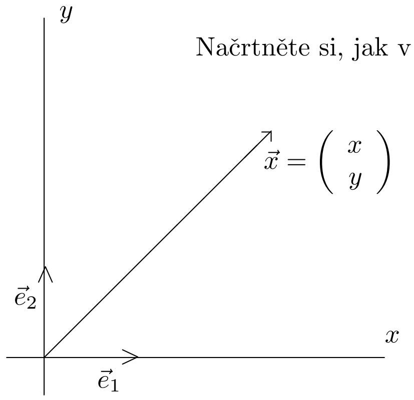
Důkaz. 1. Snadno sami ověříte, že hledanou maticí $\mathbb{A}$ je matice ${}^{\mathcal{E}_n}A^{\mathcal{E}_m}$.

2. Ještě snáze ověříte, že takto definované zobrazení A je skutečně z T^n do T^m a je lineární.

□

Příklad 2. *Příklady lineárních operátorů na $\mathbb{R}^2$. Pro zajímavost je v závorce uvedeno, čím je který operátor význačný. Operátor $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je určený maticí $\mathbb{A}$ při standardní bázi $\mathcal{E}_2$ prostoru $\mathbb{R}^2$, tj. $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.*

- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(A je* **zrcadlení** *nebo* **osová souměrnost** *podle osy x.)*
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(A je* **zrcadlení** *nebo* **osová souměrnost** *podle osy $x = y$.)*
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(A je* **středová souměrnost***.)*
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *(A je* **rotace** *o úhel θ po směru hodinových ručiček.)*
- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(A je* **prodloužení** *respektive* **zkrácení** *ve směru x.)*



Načrtněte si, jak v jednotlivých případech vypadá vektor $A\vec{x}$!

- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(A je* **zkosení** *ve směru x.)*

Namalujte, co výše uvedené operátory udělají s jednotkovou kružnicí, tj. co je obrazem jednotkové kružnice, pokud na každý její bod zapůsobíme operátorem A.

1.5 Hodnost matice

Víme ze ZS, co je hodnost lineárního zobrazení. Nyní si zavedeme tento pojem i pro matice.

Definice 2. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T.* **Hodnost matice** *$h(\mathbb{A})$ je definována jako*

$$h(\mathbb{A}) = dim[\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda.$$

Jinými slovy, $h(\mathbb{A})$ je počet lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbb{A}$.

Vyšetřování hodnosti matice je tedy podobné vyšetřování LZ a LN souboru vektorů. Matici upravíme do horního stupňovitého tvaru (z definice je jasné, že ekvivalentní řádkové úpravy hodnost matice nemění). Pak počet hlavních sloupců je roven hodnosti matice.

Příklad 3. *Spočtěte hodnost matice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V horním stupňovitém tvaru jsou první, druhý a čtvrtý sloupec hlavní, tedy $h(\mathbb{A}) = 3$.

1.5.1 Vztah hodnosti matice a hodnosti lineárního zobrazení

Ukažme, jak úzce spolu hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení souvisí.

Věta 3. *Nechť P_n a Q_m jsou vektorové prostory nad stejným tělesem. Nechť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ je báze P_n a $\mathcal{Y}$ je báze Q_m. Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.*

Důkaz. Stačí, abychom rozepsali, co je $h(A)$ (známe ze ZS) a co je $h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$. Označme $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

$$h(A) = \dim A(P_n) = \dim A[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]_\lambda = \dim[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda = \dim V.$$

$$h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = \dim[(A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, (A\vec{x}_2)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}]_\lambda = \dim W.$$

Je snadné nahlédnout, že souřadnicový izomorfismus: $Q_m \to T^m$, který vektoru $\vec{y} \in Q_m$ přiřadí vektor $(y)_{\mathcal{Y}}$, je bijekcí: $V \to W$, proto $W \cong V$ (W je izomorfní s V). Ze ZS víme, že pro prostory W, V s $\dim < \infty$ platí $W \cong V \Leftrightarrow \dim V = \dim W$. $\square$

Důsledek 2. *Zobrazení A určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ splňuje $h(A) = h(\mathbb{A})$.*

Poznámka 1. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z T a $A \in \mathcal{L}(T^n, T^m)$ takové, že $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in T^n$. Pak z předchozího důsledku plyne, že $h(A) = h(\mathbb{A})$. Tedy například všechny operátory z Příkladu 2 mají hodnost 2.*

1.5.2 Regulární a singulární matice

Nyní zavedeme velmi důležitý pojem regulární matice, který se bude objevovat ve většině následujících kapitol. Postupně si budeme vyslovovat tvrzení, která budou regulární matice charakterizovat pomocí různých vlastností (soustava LAR s jediným řešením, inverzní matice, nenulový determinant, nenulová vlastní čísla atd.)

Věta 4. *Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s prvky z tělesa T a nechť P_n je vektorový prostor nad T s bází $\mathcal{X}$ a Q_n je vektorový prostor nad T s bází $\mathcal{Y}$. Pak $h(\mathbb{A}) = n$, právě když zobrazení A určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ je izomorfismus.*

Důkaz. Důkaz je hotový, pokud si uvědomíme, že pro $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$ platí, že A je "na" (tj. $h(A) = n$) právě tehdy, když A je izomorfismus. Pak už stačí aplikovat Větu 3, která dává rovnost $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}) = h(\mathbb{A})$. $\square$

Speciálně je-li $P_n = Q_n$, pak v předchozí větě lze izomorfismus nahradit slovem regulární operátor. Zde má původ slovíčko regulární v následující definici.

Definice 3. *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ řádu n se nazývá* **regulární**, *pokud $h(\mathbb{A}) = n$.*

Poznámka 2. *Všechny matice z Příkladu 2 byly regulární. A tedy i všechny operátory z Příkladu 2 byly regulární (prosté a na).*

Úloha 1. *Rozmyslete si, že každý regulární operátor z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je složením konečně mnoha zrcadlení (podle osy $x = y$), prodloužení či zkrácení ve směru x či y a zkosení ve směru x či y.*

1.5.3 Frobeniova věta

Už ze zimního semestru umíme hledat řešení soustav LAR homogenních i s nenulovou pravou stranou. Dosud jsme ale neukazovali, jaká je podmínka řešitelnosti soustavy, kolik LN řešení homogenní soustavy existuje a jak najít všechna řešení. Větu, která tyto otázky zodpovídá, budeme umět dokázat pomocí znalostí řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A je lineární zobrazení. Také k jejímu elegantnímu zformulování využijeme pojem hodnost matice.

Věta 5 (Frobeniova)**.** *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ s prvky z tělesa T. Nechť $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu LAR*

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

platí:

1. *Soustava (1) má řešení $\Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, tj. hodnost matice soustavy je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy.*

2. *Označme S_0 množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$, tj. $S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\}$. Pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$.*

3. *Nechť $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. Pak množina všech řešení soustavy (1), tj. $S = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$ má tvar $\vec{a} + S_0$, kde $\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$. Vektor $\vec{a}$ nazýváme* **partikulárním řešením**.

Důkaz. K důkazu 1. tvrzení nám stačí znalosti ZS. K důkazu 2. a 3. tvrzení navíc využijeme vztahy mezi maticemi a lineárními zobrazeními, které jsme si v této kapitole vysvětlili.

1. V následujících ekvivalencích využíváme mimo jiné teorie LZ a LN.

   (1) má řešení $\Leftrightarrow$ existuje $\vec{x} \in T^n$ takový, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow$ existuje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tak, že $\alpha_1 \mathbb{A}_{\cdot 1} + \alpha_2 \mathbb{A}_{\cdot 2} + \cdots + \alpha_n \mathbb{A}_{\cdot n} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} \in [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda \Leftrightarrow [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda = [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}, \vec{b}]_\lambda \Leftrightarrow \dim[\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda = \dim[\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}, \vec{b}]_\lambda \Leftrightarrow h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$. V předposlední ekvivalenci jsme využili znalosti ze ZS: Je-li $P \subset\subset Q$ a $\dim P = \dim Q$, pak $P = Q$.

2. Nechť $A : T^n \to T^m$ je lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$, tj. pro každé $\vec{x} \in T^n$ platí $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$. Pak pro S_0 platí:

   $$S_0 = \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in T^n | A\vec{x} = \vec{0}\} = \ker A.$$

   Ze ZS víme, že jádro lineárního zobrazení tvoří podprostor, tj. $S_0 \subset\subset T^n$, a z druhé věty o dimenzi víme, že $\dim S_0 = d(A) = n - h(A) = n - h(\mathbb{A})$, kde poslední rovnost plyne z Poznámky 1.

3. Uvažujme opět $A : T^n \to T^m$ lineární zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$. Jelikož z předpokladu $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$ plyne, že $\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení, platí také, že $A\vec{x} = \vec{b}$ má řešení. Ze ZS (Věta 21 v [1]) víme, že množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $\vec{a} + \ker A$, kde $\vec{b} = A\vec{a}$. A tedy $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{b} = \mathbb{A} \cdot \vec{a}$.

□

Poznamenejme, že 2. tvrzení Frobeniovy věty vlastně říká, že počet LN řešení homogenní soustavy je roven počtu vedlejších sloupců v odpovídající matici v horním stupňovitém tvaru.

Z Frobeniovy věty lze odvodit ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 3. *Homogenní soustava se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n má pouze triviální řešení, tj. pouze nulový vektor je řešením, právě když $\mathbb{A}$ je regulární.*

Důsledek 4. *Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární.*

Příklad 4. *Najděte všechna řešení následujících soustav.*

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} u &+& v &-& 2x &+& y &-& z &=& 6 \\ 2u &+& 2v &-& 4x &-& y &+& z &=& 9 \\ u &+& v &-& 2x && && &=& 5 \\ u &-& v &+& x &+& y &-& 2z &=& 0 \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2u &+& v &+& 2x &+& y &+& 3z &=& 0 \\ 5u &+& 3v &-& 4x &+& 3y &-& 6z &=& 0 \\ u &+& v &-& 8x &+& y &-& 12z &=& 0 \end{array}$$

$$c)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x &-& y &+& 7 &=& 0 \\ 6x &-& 2y &+& 14 &=& 0 \\ x &+& y &+& 1 &=& 0 \\ x &+& 5y &-& 3 &=& 0 \\ 5x &+& y &+& 9 &=& 0 \end{array}$$

1.5.4 Hodnost součinu matic

Na základě znalosti hodnosti složeného lineárního zobrazení budeme umět dokázat, že pro hodnost součinu matic platí následující věta.

Věta 6. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$, $\mathbb{B}$ je matice typu $n \times p$ s prvky z tělesa T. Pak platí*

1. $h(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \leq \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\}$,
2. *je-li $m = n$ a $\mathbb{A}$ regulární, pak $h(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = h(\mathbb{B})$,*
3. *je-li $n = p$ a $\mathbb{B}$ regulární, pak $h(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = h(\mathbb{A})$.*

Důkaz. Pro každé $\vec{x} \in T^n$ definujme $A\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \vec{x}$ (tedy A je zobrazení určené maticí $\mathbb{A}$ při standardních bázích $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}_m$), pak $h(A) = h(\mathbb{A})$. Pro každé $\vec{x} \in T^p$ definujme $B\vec{x} = \mathbb{B} \cdot \vec{x}$, pak $h(B) = h(\mathbb{B})$. Potom $AB\vec{x} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \vec{x}$, a tedy $h(AB) = h(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$.
Ze ZS víme:

1. $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,
2. $h(AB) = h(B)$, je-li A izomorfismus ($\Leftrightarrow n = m$ a $\mathbb{A}$ regulární - tato ekvivalence plyne z Věty 4),
3. $h(AB) = h(A)$, je-li B izomorfismus ($\Leftrightarrow n = p$ a $\mathbb{B}$ regulární - tato ekvivalence plyne z Věty 4).

Přímo z definic zobrazení A, B, AB získáme tvrzení věty. Vlastně v předchozích vztazích všude nahradíme zobrazení A, B maticemi $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. □

Poznámka 3. *Nerovnost v bodě (1) Věty 6 může být ostrá. Nechť $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, pak $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Tedy $0 = h(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) < \min\{h(\mathbb{A}), h(\mathbb{B})\} = 1$.*

1.5.5 Hodnost transponované matice

Velmi zajímavým netriviálním výsledkem je, že v každé matici je počet LN sloupců stejný jako počet LN řádků. K precizní formulaci tohoto tvrzení je třeba nejprve zavést pojem transponovaná matice a k důkazu tohoto tvrzení budeme potřebovat také pojmy komplexně sdružená a hermitovsky sdružená matice.

Definice 4. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$,*

1. *pak matice* **transponovaná** *k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^T$ a je definovaná $\mathbb{A}^T_{ij} := \mathbb{A}_{ji}$,*

$$\text{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. *pak matice* **komplexně sdružená** *k matici $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, značí se $\overline{\mathbb{A}}$ a je definovaná $\overline{\mathbb{A}}_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ij}}$,*

$$\text{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \; \overline{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} -2i & 1-i & 0 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix},$$

3. *pak matice* **hermitovsky sdružená** *k matici $\mathbb{A}$ je typu $n \times m$, značí se $\mathbb{A}^H$ a je definovaná $\mathbb{A}^H = \overline{\mathbb{A}^T}$, tj. $\mathbb{A}^H_{ij} := \overline{\mathbb{A}_{ji}}$.*

$$\text{např. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbb{A}^H = \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B}^H = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ 1-i & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti: $\overline{\mathbb{A}^T} = \overline{\mathbb{A}}^T$, $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, $\overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}$, $(\mathbb{A}^H)^H = \mathbb{A}$.

Věta 7. *Nechť $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, $\mathbb{B}$ je typu $n \times p$, pak*

1. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$,
2. $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}}\ \overline{\mathbb{B}}$,
3. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^H = \mathbb{B}^H \mathbb{A}^H$.

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Příklad 5. *Ověřte si předchozí větu a vlastnosti na maticích* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Věta 8. *Nechť $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$ s prvky z T. Pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$. Jinými slovy, každá matice obsahuje stejný počet LN sloupců jako LN řádků.*

Pomocné lema 1. *Nechť $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$ s prvky z T. Pak $h(\mathbb{A}^H\mathbb{A}) = h(\mathbb{A})$.*

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Pomocné lema 2. *Pro libovolnou matici $\mathbb{B}$ s prvky z T platí $h(\mathbb{B}) = h(\overline{\mathbb{B}})$.*

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Důkaz Věty 8. vyplývá vhodným zkombinováním Pomocných lemat 1 a 2 a Věty 6 o hodnosti součinu matic. □

2 Inverzní matice a Gaussova úplná eliminace

Definice 5. *Nechť $\mathbb{A}$ je matice s prvky z T. Pokud existuje matice $\mathbb{B}$ tak, že $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{B}$ nazveme* **inverzní** *maticí k $\mathbb{A}$.*

Pozorování 1.

- *$\mathbb{A}$ musí být nutně čtvercová (plyne z pravidel pro násobení matic)*
- *pro singulární matici inverzní neexistuje (plyne z Věty 6 o hodnosti součinu matic)*

Věta 9. *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.*

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost. Existence se dokáže tím, že najdeme podobu inverzní matice $\mathbb{B}$ k matici $\mathbb{A}$. Uvažujme lineární operátor A určený maticí $\mathbb{A}$ při standardních bázích. Takový operátor je podle Věty 4 regulární, a existuje tedy operátor k němu inverzní A^{-1}. Položíme-li $\mathbb{B} := {}^{\mathcal{E}_n}(A^{-1})^{\mathcal{E}_n}$, pak snadno ověříme, že splňuje $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$. Důkaz jednoznačnosti je ponechán čtenáři. $\square$

Nyní, když víme, že pro regulární matici $\mathbb{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, má smysl ji nějak označit. Obvyklé je značení $\mathbb{A}^{-1}$.

Z Věty 9 a z faktu, že singulární matice nelze invertovat, plyne nová ekvivalentní definice regulární matice.

Důsledek 5. *Čtvercová matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když existuje $\mathbb{A}^{-1}$.*

Pozorování 2.

- *Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ jsou matice stejného řádu. Pokud $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$, pak $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ jsou regulární a $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*
- *Platí $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.*
- *Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice. Pak $(\alpha\mathbb{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{A}^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$ a $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$.*
- *Již víme (Důsledek 4), že soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbb{A}$ řádu n má právě jedno řešení, právě když $\mathbb{A}$ je regulární. Řešením je pak vektor $\vec{x} = \mathbb{A}^{-1}\vec{b}$.*

Věta 10. *Nechť $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ jsou regulární matice řádu n. Pak také matice $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ je regulární a $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.*

Důkaz. ponechán čtenáři. $\square$

2.1 Praktický výpočet $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$ – Gaussovo úplné eliminační schéma

Abychom pochopili, proč funguje Gaussova úplná eliminace, musíme si nejprve uvědomit, že řádkové úpravy v matici odpovídají násobení vhodnou maticí zleva.

Pomocné lema 3. *Nechť $\mathbb{C}$ je matice typu $m \times n$. Provedeme-li ekvivalentní řádkovou úpravu, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{T} \cdot \mathbb{C}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnou řádkovou úpravou.*

Důkaz. Čtenář snadno ověří, že je tvrzení pravdivé pro všechny ekvivalentní řádkové úpravy:

1. záměna řádků,
2. vynásobení řádku nenulovým číslem,
3. přičtení lineární kombinace ostatních řádků k vybranému řádku.

□

Věta 11. *Nechť $\mathbb{C}$ je matice typu $m \times n$. Provedeme-li konečný počet ekvivalentních řádkových úprav, je výsledná matice rovna matici $\mathbb{T} \cdot \mathbb{C}$, kde $\mathbb{T}$ je čtvercová matice řádu m, která vznikla z $\mathbb{I}$ stejnými řádkovými úpravami (EŘÚ) ve stejném pořadí.*

Důkaz. ponechán čtenáři. □

Příklad 6. *V matici $\mathbb{C}$ provádíme EŘÚ: záměna 1. a 2. řádku, přičtení 1. řádku k 2. řádku, vynásobení 3. řádku číslem 2. Ověřte, že vzniklá matice je rovna $\mathbb{T} \cdot \mathbb{C}$, kde $\mathbb{T}$ vznikla stejnými řádkovými úpravami provedenými ve stejném pořadí z jednotkové matice, tj.*

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \mathbb{T} \cdot \mathbb{C}, \quad kde\ \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu n a $\mathbb{B}$ je matice typu $n \times m$. **Úplná Gaussova eliminace** funguje následovně: zapíšeme rozšířenou matici $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ a tu pomocí EŘÚ převedeme do tvaru $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$. Rozmyslete si, že to díky regularitě $\mathbb{A}$ vždy lze. Ukažme, že pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$. Symbolicky zapsáno

$$(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim \left(\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}\right).$$

Stačí si uvědomit, že $\mathbb{I}$ vznikla EŘÚ z $\mathbb{A}$ a že $\mathbb{X}$ vznikla stejnými EŘÚ provedenými ve stejném pořadí z $\mathbb{B}$. Z Věty 11 plyne, že existuje $\mathbb{T}$ tak, že $\mathbb{I} = \mathbb{T} \cdot \mathbb{A}$ a $\mathbb{X} = \mathbb{T} \cdot \mathbb{B}$. Z první rovnosti dostáváme $\mathbb{T} = \mathbb{A}^{-1}$ a z druhé rovnosti pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 4. *Slovíčko úplná naznačuje, že narozdíl od Gaussovy eliminace, kdy jsme matici pomocí EŘÚ převedli do horního stupňovitého tvaru a zastavili se, v úplné Gaussově eliminaci z horního stupňovitého tvaru pokračujeme a EŘÚ vyrábíme nuly nad diagonálou, dokud neskončíme u jednotkové matice.*

Úplnou Gaussovu eliminaci budeme používat k řešení následujících úloh ($\mathbb{A}$ je rugulární a ostatní matice jsou správného rozměru):

1. hledání $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$,
2. hledání $\mathbb{A}^{-1}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\mathbb{I}$ v předchozím případě,
3. hledání $\mathbb{A}^{-1}\vec{b}$, tj. $\mathbb{B}$ klademe rovno $\vec{b}$,
4. hledání $\mathbb{C} \cdot \mathbb{A}^{-1}$, pak využijeme metody:

$$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{C}^T\right) \sim \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^T)^{-1} \cdot \mathbb{C}^T\right) = \left(\mathbb{I} \mid (\mathbb{A}^{-1})^T \cdot \mathbb{C}^T\right)$$

a transponováním výsledné matice $(\mathbb{A}^{-1})^T \cdot \mathbb{C}^T$ pak získáme hledanou matici $\mathbb{C} \cdot \mathbb{A}^{-1}$.

Příklad 7. *Jsou dány matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B}$, $\mathbb{C} \cdot \mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste spočetli $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pak pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.

Řešení:

$$(a) \quad (\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy}\ \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $$\left(\mathbb{A}^T \mid \mathbb{C}^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy}\ \mathbb{C} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $$(\mathbb{A} \mid \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \textit{tedy}\ \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2 (Sloupcová analogie úplné Gaussovy eliminace)**.** *Zformulujte a dokažte analogickou větu jako je Věta 11 pro ekvivalentní sloupcové úpravy. Její pomocí vymyslete sloupcovou analogii úplné Gaussovy eliminace.*

Reference

[1] E. Humhal: *Algebra 1*, http://tjn.fjfi.cvut.cz/ humhal/ALGEBRA1.pdf