5. cvičení - Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Základní úlohy:

- nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice
- rozhodnout, zda je daná matice diagonalizovatelná (případně v závislosti na parametru)
- pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, nalézt matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$
- ve speciálních jednoduchých případech rozhodnout, zda jsou dvě matice podobné

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. Pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, najděte matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

   (a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná (a navíc má všechna vlastní čísla reálná).

   (a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Zjistěte, zda $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ jsou podobné a v kladném případě nalezněte $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$.

5. Zjistěte, pro které hodnoty parametru β je diagonalizovatelná matice
$$\begin{pmatrix} -11 & -8 & 4 \\ 12+\beta & 9+\beta & -3 \\ 2\beta & 2\beta & 3 \end{pmatrix}$$

6. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1-\alpha \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

7. Je dána matice $\mathbb{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

   (b) Rozhodněte o diagonalizaci matice $\mathbb{A}$.

   (c) Najděte bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$, existuje-li.

8. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

9. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte jejich vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

10. Je dána matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

11. Je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pokud ano, najdětě matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$.

13. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte podobnostní transformaci.

14. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pro taková α najděte regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

15. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je podobná matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace. Pokud ne, vysvětlete.

Výsledky: Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Vlastní číslo 1 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 2 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 3 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Není diagonalizovatelná. Jediné vlastní číslo je 2 s geometrickou násobností 2. Lineárně nezávislé vlastní vektory jsou např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\alpha > 0$ (ovšem diagonalizovatelné pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -8$, pokud nepožadujeme, aby zároveň byla všechna vlastní čísla reálná)
   (b) diagonalizovatelné pro všechna $\alpha \in R$

4. $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$ pro $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\beta \neq -2$

6. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$

7. (a) vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 2$, s $\nu_g(0) = 1$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo $\frac{2}{3}$ s $\nu_a(\frac{2}{3}) = 1$, s $\nu_g(\frac{2}{3}) = 1$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (b) matice není diagonalizovatelná
   (c) neexistuje

8. Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1-i & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$.

9. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vlastní číslo -1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 2 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Matice $\mathbb{B}$ má vlastní čísla s opačnými znaménky a vlastní vektory stejné.

10. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo -1 s LN

vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. Je diagonalizovatelná. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$

13. Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$.

14. Je diagonalizovatelná pouze pro $\alpha = 0$ s např. $\mathbb{X} = \mathbb{I}$ a s $\mathbb{D}$ rovným nulové matici.

15. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Přitom platí $\nu_a(1) = 1$, $\nu_g(1) = 1$ a $\nu_a(0) = 2$, $\nu_g(0) = 1$ Matice $\mathbb{A}$ tedy nemůže být podobná diagonální matici.

Spektrální vlastnosti vybraných typů matic

Je třeba znát spektrální vlastnosti normálních matic, a speciálně pak symetrických a hermitovských, ortogonálních a unitárních matic (tedy vědět z teorie, co platí pro jejich vlastní čísla, vlastní vektory a diagonalizovatelnost). A také je třeba znát definici $\mathbb{A}$-skalárního součinu, kde $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní matice.

1. Je dána matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Nejprve uveďte, co vše o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizovatelnosti víme z teorie. Poté najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

2. Najděte OG bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - nejprve při použití standardního skalárního součinu,
   - poté při použití $\mathbb{A}$-skalárního součinu s maticí
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i. hermitovská,

ii. unitární,

iii. pozitivně definitní?

(b) Co vše umíte říci bez počítání o jejích vlastních číslech, vl. vektorech a diagonalizaci?

(c) Poté vlastní čísla spočtěte a najděte k nim příslušné LN vlastní vektory.

4. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$

(a) normální,

(b) hermitovská,

(c) pozitivně definitní?

Pokud jste nějakou vlastnost zaškrtli, napište, co z ní vyplývá bez počítání pro spektrum $\sigma(\mathbb{A})$ a diagonalizovatelnost $\mathbb{A}$.
Poté najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

5. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) hermitovská?

(b) symetrická?

- V případě b) (tedy symetrické matice) napište, co víte o vlastních číslech a diagonalizaci bez počítání.
- Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

6. Pro tu z následujících matic, která je hermitovská a není symetrická, uveďte, co vše víte o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizaci bez počítání. Poté najděte vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Najděte ortogonální doplněk k $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

(a) $\mathbb{R}^4$ vybaven standardním skalárním součinem,

(b) $\mathbb{R}^4$ vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Najděte $P^\perp$, pokud

(a) $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský, tj. se standardním skalárním součinem

(b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Najděte ON bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$, pokud

   (a) $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

   (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Nechť $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, tj. $\vec{x}_P$, pokud

    (a) $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

    (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem, kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Nechť je dán vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \mid \alpha_2 - \alpha_3 = 0\}$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P,

    (a) pokud $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

    (b) pokud $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem, kde $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

12. Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$, $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda$. Následující úlohu řešte nejprve při standardním skalárním součinu a poté při $\mathbb{A}$-skalárním součinu s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Najděte

    (a) $P^\perp$ do $\mathbb{C}^4$,

    (b) ortogonální průmět $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

Výsledky: Spektrální vlastnosti vybraných typů matic

1. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 4 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ při standardním skalárním součinu a např. báze $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ při $\mathbb{A}$-skalárním součinu.

3. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 2 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo -1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 3 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Matice $\mathbb{A}$ je hermitovská pro $\bar{\alpha} = -\alpha$, tj. pro α ryze imaginární, a symetrická pro $\alpha \in R$ a zároveň $\alpha = -\alpha$, tj. pro $\alpha = 0$. V posledním případě má $\mathbb{A}$ vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vlastní číslo $\sqrt{2}$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo $-\sqrt{2}$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Hermitovská je jen matice $\mathbb{B}$ a ta má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 2 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. $P^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$ při standardním skalárním součinu a $P^{\perp} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$ při $\mathbb{A}$-skalárním součinu.

8. $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\lambda}$ při standardním skalárním součinu a $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\lambda}$ při $\mathbb{A}$-skalárním součinu.

9. ON báze P je např. $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ při standardním skalárním součinu a $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ při $\mathbb{A}$-skalárním součinu.

10. (a) $\vec{x}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\vec{x}_P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. (a) $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

    (b) $\vec{x}_P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

12. Při standardním skalárním součinu je např. $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\lambda}$ a $\vec{x}_P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \\ 3-i \\ 0 \end{pmatrix}$.

    Při $\mathbb{A}$-skalárním součinu je např. $P^{\perp} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\lambda}$ a $\vec{x}_P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-i \\ 5+i \\ 4-i \\ 0 \end{pmatrix}$.